Neue Theorie

der

excentrischen Belastung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät

der

Landes-Universität Rostock

vorgelegt von

Hermann Hollender

Diplom-Ingenieur aus Köln.

Köln.

Druck von J. P. Bachem. 26420

1900.

Neue Theorie

der

excentrischen Belastung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät

der

Landes-Universität Rostock

vorgelegt von

Hermann Hollender

Diplom-Ingenieur aus Köln.

Köln.

Druck von J. P. Bachem 26410

1900.

Referent:

Herr Professor Dr. Waehsmuth.

Vorwort.

Die genaueste Analyse vermochte es nicht zu hindern, dass die Theorie der excentrischen Zug- oder Druckbelastung gerader Stäbe eine schwache Seite der Festigkeitslehre ist. Dasselbe gilt auch von der sogenannten Strebe- oder Zerknickungsfestigkeit, welche, wie wir später zeigen werden, mit der excentrischen Druckbelastung eigentlich identisch ist. Die grösste Durchbiegungsfähigkeit eines belasteten Stabes ist in dem aus der Theorie abgeleiteten Werte für die Zerknickungskraft bekanntlich nicht enthalten, so dass hieraus gefolgert werden könnte, jede beliebige Durchbiegung müsse das Zerknicken des Körpers herbeiführen. Es ist daher unerklärlich, wie sich der Körper verhalten wird, wenn man auf ihn eine grössere oder eine kleinere Kraft, als die theoretisch gefundene, einwirken lässt. Man sieht dies als einen Mangel unserer Kenntnisse über die hier obwaltenden Vorgänge an und ist deswegen bei diesem Falle der praktischen Festigkeitslehre fast allein auf die der Erfahrung entlehnten Ergebnisse angewiesen. Letztere, welche zuerst aus Versuchen, namentlich von Hodgkinson, später auch von anderen gewonnen wurden, stimmten nun mit den theoretisch berechneten Resultaten gar nicht überein, so dass man sich genötigt sah, aus jenen Versuchen brauchbare empirische Formeln zur Bestimmung der Tragkraft von Säulen aufzustellen.

Diese Sachlage veranlasste mich, diesen Teil der Festigkeitslehre einer tieferen Untersuchung zu unterziehen, deren Ergebnis ich nunmehr in dieser Schrift niederlege.

Es wurde für angemessen gehalten, im ersten Abschnitte der Abhandlung die bisherigen teils theoretisch, teils empirisch bestimmten Formeln der excentrischen Belastung, beziehungsweise Knickbelastung, sowie einzelne Versuchsergebnisse aufzunehmen, um bei später zu ziehenden Vergleichen mit den neu aufgestellten Formeln bequem darauf hinweisen zu können; es dürfte damit auch dem Leser Erleichterung geboten sein.

Die Entwicklungen durch Weglassen einer grösseren Zahl von Zwischengleichungen zu kürzen, ist ein Mittel, welches zwar den Schein einer eleganten Einfachheit erwecken kann, das aber oft mehr schadet als nützt, da der Leser das Gestrichene selbst wieder herstellen muss, wenn er den Faden der Rechnung genauer verfolgen will. In dieser Hinsicht ist daher, insoweit es erforderlich schien, Rechnung getragen worden.

Was die neue Theorie selbst anbetrifft, wird gezeigt werden, dass die bisherige Theorie der excentrischen Belastung gerader Stäbe unrichtig ist, und werden ferner neue Formeln entwickelt werden; dabei sind die Voraussetzungen über die zu untersuchenden Körper dieselben, wie sie bisher gemacht wurden.

Inhalt.

I. Abschnitt.

Die bisherige Theorie und die modernen Formeln.

Seite

§ 1. Allgemeines 7
§ 2. Wesen der Knickung 9
§ 3. Die Euler'sche Gleichung 11
§ 4. Formel von Navier, Schwarz, Rankine 15
§ 5. Formel von v. Tetmajer 19
§ 6. Knickungsversuche 20
A. Versuche von Bauschinger 20
B. Versuche von v. Tetmajer 24

II. Abschnitt.

Die neue Theorie.

§ 7. Einleitung 27
§ 8. Relationen zwischen den inneren und äusseren Kräften eines geraden Stabes 34
§ 9. Kritik der bisherigen Theorie 40
Die exacte Lösung des Problems 45
§ 10. Die Durchbiegung und Tragkraft eines auf excentrische Zug- oder Druckfestigkeit beanspruchten geraden prismatischen Stabes 46

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552717_0031

I. Abschnitt.

Die bisherige Theorie und die modernen Formeln.

§ 1.

Allgemeines.

Bei der Dimensionirung von Säulen auf Druck folgen wir bei centrischen Kräften dem Hooke'schen Gesetze der gleichmässigen Verteilung und bei excentrischen Drücken der Formel von Navier oder anderen, indem wir in beiden Fällen jene Belastung, die theoretisch eine zulässige, beziehw. eine Bruchspannung hervorruft, als eine zulässige, beziehw. Bruchlast bezeichnen. Ein umgekehrter Gedankengang liegt der Berechnung der Knicklasten zu Grunde, da man zu ihrer Bestimmung diese Spannungsgrenzen nicht benutzt, wohl aber als eine notwendige Folge voraussetzt. Dieser Widerspruch in der Auffassung tritt insbesondere dann hervor, wenn man beide Rechnungswege in einer Rechnung — für excentrische Knickung — vereinigt. Dabei bestehen noch zwischen den einzelnen gebräuchlichen Formeln bedeutende Unterschiede, welche es erklärlich scheinen lassen, dafs die Praxis dieses dunkle Gebiet der excentrischen Knickung, das durch keinen Versuch erhellt ist, selbst oft dann nicht betritt, wenn die excentrische Lage der Kräfte es unbedingt verlangt, indem selbst anerkannt gute Formeln unter Umständen zu unmöglichen Resultaten führen.

Gegenüber dieser unhaltbaren Lage, die nur durch Versuche endgültig beseitigt werden kann, ist es das Ziel dieser Arbeit, das ganze Gebiet der excentrischen Belastung auf eine gemeinsame theoretische Basis zu stellen.

Bei der Behandlungsweise der Dimensionirung gerader prismatischer Körper (Stäbe, Säulen) durch axial gerichtete Kräfte,

sogenannte Normalkräfte, unterscheidet man bekanntlich nicht allein zwischen den Fällen centrischen und excentrischen Angriffes, sondern macht die Behandlungsweise auch von dem Verhältnis der Längen- und Querdimensionen der Körper abhängig.

Um die Körper der Behandlungsweise überhaupt zugänglich zu machen, müssen bestimmte Voraussetzungen gemacht werden, um dann diese sogenannten idealen Körper auf Festigkeit und Deformation zu untersuchen. Ob dann die erlangten Resultate, deren Herleitung allein noch mathematischer Natur ist, für die realen Körper mehr oder weniger Geltung haben, hängt davon ab, ob die gemachten Voraussetzungen mehr oder weniger zutreffen, und dies ist in jedem einzelnen Falle der Inanspruchnahme wohl zu untersuchen.

In unserem Falle der axialen centrischen oder excentrischen Belastung eines idealen prismatischen Stabes würde bei der mathematischen Behandlung ein Unterschied zwischen einer verhältnismässig grossen oder kleinen Länge des Stabes prinzipiell nicht zu machen sein. Unser realer prismatischer Stab dagegen verlangt, wie die Erfahrung, wie Versuche zeigen, in dieser Hinsicht Berücksichtigung. So bezeichnet man bekanntlich den Deformationsvorgang eines axial belasteten Stabes von grosser Länge und geringen Querschnittsabmessungen bis zum eintretenden Bruch, oder bis zur Unbrauchbarkeit, mit dem Vorgang der Knickung.

Man hat nun vornehmlich zwei Arten von Formeln für die excentrische Belastung beziehungsweise Knickbelastung, nämlich:

a) Die alten Formeln, welche nur für schlanke Säulen gelten. Dahin gehören:
   1. die rein theoretische Formel von Euler,
   2. die empirischen Formeln von Hodgkinson und anderen.

b) Die neuen oder modernen Formeln, welche für alle Längenverhältnisse gelten, und teils theoretisch, teils auf theoretisch-empirischem Wege abgeleitet wurden.

§ 2.

Wesen der Knickung.

Ein prismatischer Stab AB (Fig. 1) von grosser Länge und geringen Querschnittsabmessungen sei durch die Kraft P belastet. Nun seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

1. die Lage der Kraft P falle genau mit der Stabaxe zusammen,
2. die Stabaxe bilde thatsächlich eine gerade Linie, das Material des Stabes sei durchaus gleichartig und befinde sich an allen Stellen in dem gleichen Zustande,
3. seitliche Kräfte sollen auf den Stab nicht einwirken, derselbe überhaupt Einflüssen, welche solche hervorrufen würden, nicht unterworfen sein.

Fig. 1.

Bei Erfüllung dieser Voraussetzungen würde der Stab nur eine Zusammendrückung in Richtung seiner Axe und senkrecht dazu eine Querschnittsvergrösserung erfahren. Eine Veranlassung, mit dem freien Ende seitlich auszuweichen, läge dann nicht vor.

In Wirklichkeit sind die genannten Voraussetzungen, namentlich diejenigen unter 1 und 2, genau überhaupt nicht zu erfüllen und angenähert um so weniger leicht, je grösser die Länge des Stabes im Verhältnis zu seinen Querschnittsabmessungen ist. Die Erfahrung zeigt infolgedessen denn auch, dass ein solcher Stab mit seinem freien Ende auszuweichen bestrebt ist, dass er eine Biegung erleidet.

Um uns über den hier eintretenden Vorgang ein richtiges Bild zu verschaffen, führen wir folgende Versuche durch.

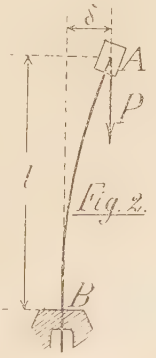


Fig. 2.

1. Wir nehmen einen sorgfältig gerade gerichteten Stahldraht von 3,5 mm Durchmesser, spannen denselben möglichst genau vertikal in den Schraubstock so ein, dass er eine freie Länge von $l = 850$ mm besitzt, Fig. 2. Hierauf belasten wir ihn in Richtung seiner Axe mit $P = P_1 = 0{,}4$ kg. Sobald Draht und Belastung sich selbst überlassen werden, beginnt das freie Ende

des ersteren auszuweichen, bis er bei $\delta =$ rund 25 mm zur Ruhe gelangt. Das biegende Moment $P \cdot \delta$ befindet sich im Gleichgewichte mit den durch dasselbe im Inneren des Stabes hervorgerufenen Elasticitätskräften, wenn von dem Einfluss des Eigengewichtes des Drahtes abgesehen wird. Eine Zurückführung des ausgewichenen Drahtes in die vertikale Anfangslage oder eine von Hand aus erzeugte weitere Ausbiegung als $\delta = 25$ mm hat bei Selbstüberlassung des Stabes zur Folge, dass er in die Lage $\delta = 25$ mm zurückkehrt. Der Stab befindet sich somit im stabilen Gleichgewichtszustande.

Wir ersetzen nun die Belastung $P_1 = 0{,}4$ kg durch eine solche von $P = P_2 = 1{,}1$ kg. Bei dieser Belastung biegt sich das freie Ende des Drahtes fortgesetzt, bis das belastende Gewicht die Werkbank des Schraubstockes erreicht hat, Figur 3. Die Biegung ist naturgemäss an der Einspannstelle am stärksten. Der Stab ist hierbei nicht gebrochen, doch ist eine Verbiegung bis zur Unbrauchbarkeit des Stabes als Stütze eingetreten.

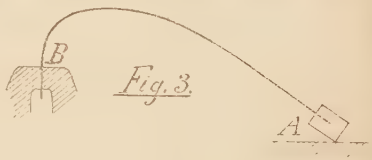


Fig. 3.

2. An Stelle des Stahldrahtes spanne man einen schlanken Holzstab von quadratischem Querschnitt, Seitenlänge 7.5 mm, möglichst genau vertikal in den Schraubstock und belaste ihn am freien Ende mit $P = P_1 = 1{,}1$ kg. Die Länge des Stabes ist $l = 850$ mm. Der Stab biegt aus und gelangt bei $\delta =$ rund 150 mm zur Ruhe.

Wird die Belastung $P_1 = 1{,}1$ kg entfernt und durch $P = P_2 =$ 1.3 kg ersetzt, so biegt sich der selbstüberlassene Stab fortgesetzt aus, bis er etwa bei $\delta = 550$ mm bricht.

Die Erscheinungen, welche die beiden Stäbe bei der Belastung mit $P = P_2$ zeigen, werden unter dem Namen Knickung des Stabes zusammengefasst. Im ersten Falle tritt eine Biegung ein, welche — abgesehen von der Möglichkeit, dass es sich um eine Feder handelt — mit dem Zwecke des Stabes, ein widerstandsfähiger Konstruktionsteil zu sein, unvereinbar ist: im zweiten Falle erfolgt ein Bruch, der gleichfalls unzulässig erscheint.

Aus den Versuchen 1 und 2 erkennen wir folgendes:

Bei der Belastung P_1 weicht der Stab nur um δ aus und gelangt zur Ruhe; er befindet sich in dieser Lage im stabilen Gleich-

gewichte. Bei der Belastung P_2 dagegen besteht überhaupt ein Gleichgewichtszustand nicht, der Stab biegt sich aus, bis die Belastung zum Aufruhen gelangt, also teilweise aufgehoben wird (Versuch 1), beziehungsweise bis sie zum Bruche führt (Versuch 2). In beiden Fällen muss es hiernach eine zwischen P_1 und P_2 gelegene Belastung $P = P_0$ geben, für die der stabile Gleichgewichtszustand, welcher bei $P = P_1$ noch zu beobachten war, gerade aufhört, zu bestehen. Diese Kraft P_0 wird als Knickbelastung bezeichnet.

Wir gehen nunmehr dazu über, die einzelnen Formeln (wenigstens die wichtigsten) anzuführen und zu besprechen.

§ 3.

Die Euler'sche Gleichung.

Um die im vorigen Paragraphen als Knickbelastung P_0 bezeichnete Kraft zu ermitteln, wollen wir die Entwicklung von Grashof (Theorie der Elasticität und Festigkeit, 1878, von Seite 162 ab) zu Grunde legen.

Für einen nach Figur 4 belasteten Stab ergiebt sich die Momentengleichung

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = P(p + \delta - y); \quad \ldots \quad (1)$$

wenn angenähert

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho}$$

gesetzt wird, unter ϱ den Krümmungsradius der elastischen Linie (Schwerlinie, neutrale Linie) verstanden. Mit

$$\frac{P}{EJ} = \alpha^2$$

folgt durch Integration

$$\frac{p}{p+\delta} = \cos(\alpha l) \quad \ldots \quad (2)$$

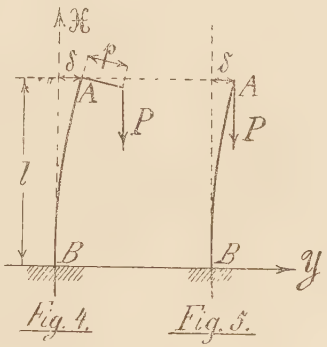


Fig. 4. Fig. 5.

Die Durchbiegung des freien Stabendes

$$\delta = p\left[\frac{1}{\cos(al)} - 1\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2a)$$

Weiterhin wird das grösste Moment

$$M = P(p + \delta) = \frac{P \cdot p}{\cos(al)} ,$$

und die grösste Druckspannung im Befestigungsquerschnitte B:

$$\sigma'' = \left[\frac{pe''}{J\cos(al)} + \frac{1}{F}\right] \cdot P \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Hierin bedeutet J das Trägheitsmoment, F den Inhalt des Bruchquerschnittes und e'' den Abstand des äussersten gedrückten Punktes von der Biegungsaxe. Lässt man nun p abnehmen und schliesslich in Null übergehen, so ergiebt sich der in Figur 5 dargestellte Belastungszustand als Grenzfall des vorher betrachteten. Dabei wird zwar auch δ abnehmen, jedoch nicht notwendig bis zu Null. Wenn aber $p = 0$ und $\delta > 0$ ist, so folgt aus Gleichung (2) $\cos(al) = 0$ und man erhält nach Gleichung (3)

$$\sigma'' = \left[\frac{e''}{J}\frac{0}{0} + \frac{1}{F}\right] \cdot P , \quad \ldots \ldots$$

d. h. einen unbestimmten Wert, woraus zu schliessen ist, dass, wenn gemäss den Verhältnissen das Gleichgewicht bei gekrümmter Mittellinie überhaupt möglich ist, dasselbe bei jedem Werte von δ stattfinden kann, so dass man keine Sicherheit dafür haben würde, dass die Biegungen und die entsprechenden Spannungen nicht anwachsen, bis sie den Bruch des Stabes durch Zerknickung herbeiführen. Um diese Gefahr zu vermeiden, ist also P kleiner zu wählen, als der kleinste Wert, bei dem irgend eine noch so geringe Biegung überhaupt bestehen, d. h. wodurch $\cos(al) = 0$ werden kann. Dieser Wert von P folgt aus

$$al = l\sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{zu}$$

$$P = P_0 = \frac{\pi^2}{4}\frac{EJ}{l^2} , \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

welche Gleichung unter dem Namen der Euler'schen Formel bekannt ist.

P_0 wird sonach als diejenige Kraft betrachtet, durch die der Stab zwar nicht zerknickt werden muss, aber doch bei der geringsten Zufälligkeit zerknickt werden kann.

Diese aus der angegebenen Quelle fast wörtlich übernommene Entwicklung ist so klar und folgerichtig, die Deutung des Schlussergebnisses so einleuchtend, dass kein Grund vorzuliegen scheint, die Richtigkeit in Zweifel zu ziehen. Dies ist dennoch sehr oft geschehen und man hat geradezu behauptet, dass die Gleichung (4) einen Widerspruch, ein „Paradoxon" in sich schliesse. Über die Bemängelungen, welche die Euler'sche Gleichung in den Kreisen der Techniker des Hochbau- und Bauingenieurwesens erfahren hat, wollen wir an späterer Stelle noch ein Wort sprechen.

Man muss ja zugestehen, dass das Ergebnis der Untersuchung ein anderes ist, als man von vornherein gesucht und erwartet hatte. Grashof selbst bezeichnet den Umstand, dass in allen Fällen erst bei bestimmter Grösse der äussern Kraft P irgend eine Biegung des Stabes möglich wird, dass aber, wenn P diesen Wert hat, die Grösse der Biegung unbestimmt bleibt, als auffallend, und untersucht deshalb, wie weit dieses Ergebnis etwa nur von den Ungenauigkeiten der Entwicklung herrührt.

Ganz ähnliche Bedenken hatten schon die Zeitgenossen und Nachfolger Eulers. Lagrange versuchte schon damals, durch eine schärfere Rechnung die Euler'sche Formel zu berichtigen, jedoch ohne wesentlichen Erfolg. Es gelingt zwar, die Unbestimmtheit der Biegung zu beseitigen, wie die von Grashof auf Seite 172 abgeleitete Gleichung

$$\frac{2}{\pi} l \sqrt{\frac{P}{EJ}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{P}{EJ} \frac{\delta^2}{4} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{P}{EJ} \frac{\delta^2}{4}\right)^2 + \ldots \quad (5)$$

zeigt.

Hiernach ist δ imaginär, so lange $P < P_0$, wird Null mit $P = P_0$ und nimmt stetig zu, wenn P über den aus Gleichung (4) berechneten Wert P_0 hinaus wächst.

Bei den praktischen Anwendungen sind aber die Verhältnisse meist von solcher Art, dass P nur sehr wenig grösser als der Grenzwert P_0 zu sein braucht, um eine unzulässige Grösse der

Durchbiegung δ herbeizuführen, die eine übermässige Anstrengung oder gar die Zerstörung des Stabes zur Folge haben würde.

Somit vermag, wie sich Grashof ausdrückt, auch die genaueste Analyse nicht zu hindern, dass die Theorie der Knickung insofern eine schwache Seite der Elasticitätslehre ist, als man darauf verzichten muss, die Verhältnisse so zu wählen, dass die grössten Werte der Zugspannung σ' und der Druckspannung σ'' durch die Biegung des Stabes einen vorgeschriebenen Betrag k' bezw. k'' erreichen, weil dann eine äusserst geringe Vergrösserung von P schon hinreichen würde, um jene Spannungen bis zur Gefahr des Knickens zu steigern. Es bleibt nur übrig, die Abmessungen so zu wählen, dass erst durch das n-fache der gegebenen Kraft P die theoretische Möglichkeit irgend einer Biegung eintreten und damit die Gefahr der Knickung nahegeführt werden würde. Die Wahl des Sicherheitsfaktors n ist dabei der Willkür oder der Erfahrung anheimgegeben, indem er lediglich zufälligen oder einer genaueren Berücksichtigung sich entziehenden Umständen Rechnung zu tragen hat.

Falls die Beanspruchungen über die Elasticitäts- oder richtiger Proportionalitätsgrenze auftreten, muss die Grösse E in der Euler'schen Formel durch eine andere ersetzt werden, da alsdann die Spannungen nicht mehr durch den konstanten Elasticitätsmodul E, sondern durch den Formänderungskoeffizienten $T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ ($d\sigma$ die Spannungszunahme, $d\varepsilon$ die ihr entsprechende Zunahme der relativen Dehnung) gemessen werden.*) Die Formel (4) nimmt alsdann die Form

$$P_0 = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{TJ}{l^2}$$

an. Die Grösse T ist durch das Dehnungs- oder Arbeitsdiagramm des Materials gegeben. (Vergl. II. Abschnitt § 7.)

Die auf Grund von Versuchen aufgestellten empirischen Formeln von Hodgkinson sollen hier keiner Erwähnung Platz finden,

*) Siehe den Aufsatz von Eugesser, Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins, Hannover 1889, Heft 4, oder Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins 1893, Seite 506.

da dieselben zudem weder sehr bequem, noch allgemein anwendbar sind. Bequemer als die Hodgkinson'schen Formeln sind die modernen Formeln, von denen wir einige in den folgenden Paragraphen anführen wollen.

---

§ 4.

Formel von Navier, Schwarz, Rankine.

Im vorigen Paragraphen ist schon der Erwähnung Raum gegeben worden, dass die Euler'sche Formel in den Kreisen der Techniker vielfach Bemängelung erfahren hat. Die Ursache für die auf den ersten Blick sehr befremdliche Erscheinung, dass man die Ergebnisse einer mathematischen Entwicklung verwarf, an der man keinen Fehler nachweisen konnte und auf deren Voraussetzungen man sich sonst bei allen Rechnungen stützte, besteht darin, dass die älteren Techniker, namentlich diejenigen des Hochbau- und Bauingenieurwesens, so gewohnt waren, bei Festigkeitsberechnungen den Sicherheitsgrad nach der auftretenden grössten Spannung zu bemessen, dass sie dadurch unfähig wurden, einen Fall zu beurteilen, bei dem dieser Massstab keinen Sinn hatte.

Im Maschineningenieurwesen war nichts oder verhältnismässig nur wenig von einer solchen Bemängelung zu bemerken.

Man nahm und nimmt auch noch vielfach Anstoss an der Willkür, die bei der Wahl eines Sicherheitsfaktors nicht zu vermeiden ist. Dabei wird ganz übersehen, dass auch bei der Wahl der Zahlenwerte k' und k'' (§ 3) für die zulässige Beanspruchung auf Zug und auf Druck eine ähnliche Willkür obwaltet.

Ferner zeigten die Ergebnisse von Knickungsversuchen keine Übereinstimmung mit dem, was die Euler'sche Gleichung lieferte. Man übersah hierbei, dass, während die Entwicklung dieser Gleichung freie Beweglichkeit der Stabenden voraussetzt, bei den Versuchen diese freie Beweglichkeit nicht vorhanden war. Hätte man in der Erwägung, dass die vollständige Aufhebung dieser Beweglichkeit, d. i. die Einspannung des Stabes, dazu führt, in der Gleichung (4) an Stelle der Länge l nur einen aliquoten Teil derselben einzusetzen, in jedem Falle zu ermitteln gesucht, welcher Bruchteil

von l den Befestigungsverhältnissen der Stabenden ungefähr entsprochen haben würde, das Ergebnis würde ein anderes gewesen sein. Auch der Einfluss der Veränderlichkeit des Elasticitätsmoduls des Gusseisens, derjenige der Gusshaut und etwaiger Gussspannungen durften bei der Beurteilung der Versuchsergebnisse, welche gusseiserne Stützen lieferten, nicht übersehen werden.

Fernere Einwürfe von mehr untergeordneter Bedeutung beziehen sich auf den Umstand, dass die Formel (4) in § 3 nur für Stäbe anwendbar ist, deren Länge ein gewisses Mass überschreitet, während kürzere Stäbe auf einfache Druckfestigkeit zu berechnen sind. Man macht hiergegen geltend, dass ein solcher plötzlicher Wechsel im Verhalten von Stäben mit nur wenig verschiedener Länge dem Grundsatz der Stetigkeit widerspreche und deshalb unwahrscheinlich sei. Dieser Einwurf stellt jedoch nur einen Widerspruch zwischen der Knickformel (4) und der gewöhnlichen Druckfestigkeitsformel fest, entscheidet aber nicht, welche von beiden Formeln mehr Vertrauen beanspruchen darf. Die übliche Berechnung kurzer, gedrückter Stäbe ist nun keineswegs so wohlbegründet, dass sie als unantastbar gelten könnte. Im Gegenteil wird von vielen Beobachtern hervorgehoben, dass die Zerstörung eines Körpers durch reinen Druck kaum möglich sei und dass selbst ganz kurze Stäbe, deren Länge z. B. nur dem dreifachen des kleinsten Quermasses gleichkommt, durch Biegung, d. h. durch Knicken und nicht durch Druck zerstört werden. Bei so kurzen Stäben ist aber die Art und Weise, wie die äusseren Kräfte auf die Angriffsflächen wirken, von sehr grossem Einflusse auf die Tragfähigkeit. Die theoretische Ermittlung dieser Einflüsse ist bisher selbst für die einfachsten Fälle noch nicht geglückt. Ferner findet sich ein Seitenstück zu vorbeschriebenem Widerspruch bei der Berechnung der durch Querkräfte beanspruchten Körper. Sind diese hinreichend lang, so rechnet man auf Biegung; sind sie kurz, so wird auf Abscheren gerechnet.

Übrigens ist durch Versuche nachgewiesen, dass auch die vielverwendeten modernen Formeln, trotzdem sie zwei willkürliche Faktoren enthalten, sich dem wirklichen Verhalten von Stäben verschiedener Länge keineswegs besonders gut anschmiegen.

Die teils empirischen Formeln von Navier, Schwarz, Rankine, Lang, Schäffer u. a., welche die Ermittlung der zulässigen Belastung

unter Zugrundelegung eines bestimmten grössten Kantendruckes, entsprechend einer bestimmten excentrischen Belastung und Durchbiegung, durchführen, sind nach Versuchen von Bauschinger und theoretischen Untersuchungen von Zimmermann*) wissenschaftlich nicht gerechtfertigt.

Die Formel, die wir jetzt anführen wollen, ist zu verschiedenen Zeiten auf verschiedenen Wegen gefunden worden und sie wird daher bald als die Navier'sche, bald als die Schwarz'sche, bald als die Rankine'sche bezeichnet. Man geht bei ihrer Ableitung am einfachsten von der an sich ganz berechtigten Annahme aus, dass die Kraft P wegen zufälliger Abweichungen der Stabaxe von der geraden Linie und wegen der unvermeidlichen Excentricität des Kraftangriffs von vornherein an einem Hebelarme p wirkt. Für diesen Hebelarm setze man hypothetisch

$$p = \varkappa \frac{l^2}{e} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

worin $\varkappa$ eine absolute Zahl ist, die aus Versuchen zu bestimmen ist. Zur Rechtfertigung für den Ansatz (6) kann man anführen, dass Abweichungen der genannten Art um so eher eintreten, je grösser die Länge l im Vergleiche zu dem Abstande e der äussersten Faser von der in Frage kommenden Schwerlinie ist. Freilich liesse sich diese Überlegung auch noch auf andere Art zum Ausdrucke bringen und Gleichung (6) haftet daher eine Willkür an, die nur durch die nachträgliche Bestätigung durch die Erfahrung gehoben werden könnte. Nimmt man Gleichung (6) aber an, so ist damit der Fall der Knickfestigkeit auf den der gewöhnlichen excentrischen Druckbelastung zurückgeführt. Für die Spannung an der äussersten Faser erhält man

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot p}{J} e = \frac{P}{F}\left(1 + \varkappa \frac{l^2}{r^2}\right), \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

wenn mit r der Trägheitsradius bezeichnet wird.

Der zulässige Wert der Druckbelastung folgt daraus, wenn k die zulässige höchste Spannung bedeutet

$$P_z = \frac{F \cdot k}{1 + \varkappa \frac{l^2}{r^2}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

*) Siehe Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 245, 353.

und dies ist die Formel, um deren Ableitung es sich handelte*). Wenn man es als einen Vorzug betrachten will, dass die zulässige Beanspruchung auf Zerknicken P_z von der zulässigen Druckspannung k des Baustoffes abhängig gemacht wird, kommt ihr dieser Vorzug in der That zu. Wichtiger ist aber natürlich die Frage, inwiefern die Gleichung mit dem thatsächlichen Verhalten eines auf Druck beanspruchten Stabes übereinstimmt, und wir haben schon erwähnt, dass deren Beantwortung zu Ungunsten der Gleichung (8) ausfällt. Natürlich ist es immer möglich, Gleichung (8) zur Übereinstimmung mit irgend einem bestimmten Versuchsergebnisse zu bringen, wenn man die Konstante $\varkappa$ passend wählt. In dieser Hinsicht haben alle Formeln, in die man einen aus den Versuchen selbst erst zu bestimmenden Koeffizienten einführt, einen Vorsprung vor anderen, die auf rationellerem Wege abgeleitet sind, wie z. B. die Euler'sche Formel, die schon durch einen einzigen Versuch widerlegt werden könnte, wenn sie auf einer falschen Grundlage beruhte. Es ist auch klar, dass man Gleichung (8) ohne Besorgnis auf eine ganze Gruppe verwandter Fälle anwenden kann, wenn man $\varkappa$ aus einem Knickversuche entnimmt, der unter ganz ähnlichen Umständen angestellt wurde. Bei Festigkeitsberechnungen dieser Art handelt es sich ja ohnehin mehr um eine ungefähre Abschätzung als um die Gewinnung genau richtiger Werte. Eine wissenschaftliche Bedeutung könnte man Gleichung (8) aber nur dann zusprechen, wenn die Konstante $\varkappa$ nur von dem Baustoffe abhängig wäre und bei allen Längenverhältnissen des Stabes wirklich als konstant betrachtet werden dürfte. Das trifft aber, wie namentlich aus den Versuchen v. Tetmajer's hervorgeht, keineswegs zu. Professor v. Tetmajer hat durch Versuche mit Holzstreben von nahezu quadratischem Querschnitt (Seitenlänge a) gefunden, dass $\varkappa$ auch nicht annähernd denselben Wert behält, wenn sich $\frac{l}{a}$ zwischen den Grenzen 10 und 20 ändert. Vielmehr zeigte sich $\left(1 + \varkappa \frac{l^2}{r^2}\right)$ sehr wenig

*) Rühlmann stellt in seinem Werke: Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik, Leipzig 1885, S. 364 und 365 fest, dass diese Gleichung, welche auch als Gordon- und Rankine'sche Formel bezeichnet wird, von Navier zuerst entwickelt wurde, dass später 1854 Schwarz sie in anderer Weise ableitete u. s. f.

veränderlich*). Es ergab sich im Mittel aus je 29 Versuchen

$$\text{für } \frac{l}{a} = \quad 10 \qquad 15 \qquad 20$$

$$\left(1 + \varkappa \frac{l^2}{r^2}\right) = \quad 1{,}27 \qquad 1{,}30 \qquad 1{,}32$$

In jedem anderen Falle der Anwendung müsste man, um ganz sicher zu gehen, einen anderen Wert von $\varkappa$ einführen, und die Brauchbarkeit des Resultates hängt ganz davon ab, ob man den im gegebenen Falle zutreffenden Wert von $\varkappa$ richtig eingeschätzt hat.

§ 5.

Formel von v. Tetmajer.

Aus zahlreichen Versuchen mit Stäben aus verschiedenen Stoffen hat v. Tetmajer eine empirische Formel zur Berechnung von Stäben aufgestellt.

Bezeichnet k die zulässige Druckspannung, F die Fläche des Querschnittes des Stabes, so ist die zulässige Druckbelastung

$$P_d = F \cdot k$$

Wendet man die Formel (4) des § 3 auf den in Figur 6 dargestellten Belastungszustand an, so hat man für die Länge l die Länge $\frac{1}{2}l$ zu setzen und erhält für Figur 6

$$P = P_0 = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

als den Euler'schen Wert der Knickbelastung. Bezeichnet nun P_k die wirkliche Knickbelastung, r den kleinsten Trägheitshalbmesser des Querschnittes, so kann nach v. Tetmajer für $P_d > P_0$

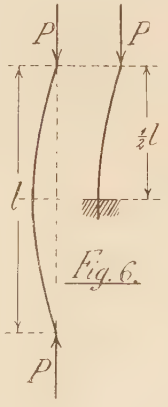


Fig. 6.

*) Vergl. die Mitteilungen von Prof. v. Tetmajer in Bd. II Nr. 22 der Schweizerischen Bauzeitung v. 1. Dez. 1883, S. 141, oder den Auszug in Nr. 50, S. 460 d. Centralbl. der Bauverw. f. 1883.

$$P_k = aF - b\frac{lF}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

gesetzt werden.

Die Konstanten a und b sind nach den Versuchen ermittelt und zwar für

Schweisseisen	a = 3030 atm.,	b = 12,9 atm.
Weiches Flusseisen . .	a = 3100 „	b = 11,4 „
Härteres Flusseisen .	a = 3210 „	b = 11,6 „
Lufttrockenes Nadelholz	a = 293 „	b = 1,94 „

Für Gusseisen reicht Gl. (10) mit zwei Konstanten nicht aus. Für Stäbe mit Längenverhältnissen $\frac{l}{r} = 5$ bis 80 setzt v. Tetmajer nach seinen Versuchen

$$\frac{P_k}{F} = \left\{ 0{,}53 \left(\frac{l}{r}\right)^2 - 120\,\frac{l}{r} + 7760 \right\} \text{atm.} \quad . \quad (11)$$

Für schlankere Stäbe wird die Anwendung der Euler'schen Formel (9) empfohlen. Bei allen diesen Formeln wird vorausgesetzt, dafs die Enden um Spitzen drehbar gelagert sind.

---

§ 6.

Knickungsversuche.

A. Versuche von Bauschinger.

Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der Königl. technischen Hochschule in München, Heft 15, München 1887.

Von der grossen Anzahl von Versuchen mit Stützen aus ⊢-, ⊔-, ⊥-, ∟-Eisen wollen wir diejenigen herausgreifen, welche sich auf Stäbe mit Querschnitten beziehen, die zwei Symmetrieaxen besitzen.

Material: Walzeisen. Querschnittsform: ⊢

a) Die Enden der Versuchsstäbe sind in Spitzen, also frei beweglich gelagert, Figur 6, § 5.

№	Querschnitt			Trägheitsmoment	Länge	Knickbelastung		Belastung auf 1 qcm	Abweichung
	Breite	Höhe	Inhalt F	J	l	beobachtet P_0'	berechnet $P_0=\pi^2\frac{EJ}{l^2}$	$\sigma=P_0':F$	$\frac{P_0'-P_0}{P_0'}100$
	cm	cm	qcm	cm^4	cm	kg	kg	kg	%
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	25,2	13,8	63,55	575,6	405,5	70500	69000	1105	+ 2
2	12,4	7,2	20,7	37,99	89	61000	94500	3035	s. U.
3	—	—	18,22	—	151	30250	33000	1662	—9
4	—	—	18,22	—	223	17250	15000	948	+ 13
5	9,93	4,92	11,16	17,31	156,1	10650	14000	956	—31
6	—	—	11,38	—	270	4100	4700	360	—15
7	—	—	11,76	—	465	1300	1600	111	—23
8	9,99	5,01	10,58	14,2	254,3	3900	4300	369	—10
9	9,98	5,01	10,58	14,2	254,3	4000	4300	378	—7,5
10	9,95	5,00	10,55	14,2	254,4	3900	4300	370	—10
11	10,00	5,00	10,56	14,2	254,4	4050	4300	384	—6
12	9,96	4,99	10,55	14,2	254,3	3900	4300	370	—10

Bis auf den Versuch No. 2, welcher bei der Belastung von 3035 kg/qcm (Spalte 9) schon infolge der Anforderungen der einfachen Druckfestigkeit hier auszuscheiden hat, also nicht in Betracht kommt, sind die Abweichungen zwischen den beobachteten Knickbelastungen P_0' (Spalte 7) und den mit $E = 2\,000\,000$ berechneten Werten P_0 (Spalte 8) durchschnittlich nicht so gross, dass das in der Gleichung

$$P_0 = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

ausgesprochene Gesetz als unzutreffend erschiene, namentlich wenn noch berücksichtigt wird, dass die Querschnittsform, welche hier vorliegt, gegenüber Knickung sich nicht ganz so sicher verhalten dürfte, wie dies die Entwicklung voraussetzt.

Hiernach ist in den Ergebnissen der vorstehenden Versuche eine Bestätigung des in Frage stehenden Gesetzes zu erblicken.

Zum Zwecke der Klarstellung, dass die Ausbiegungen schon bei verhältnismässig sehr geringen Belastungen beginnen, sei ein

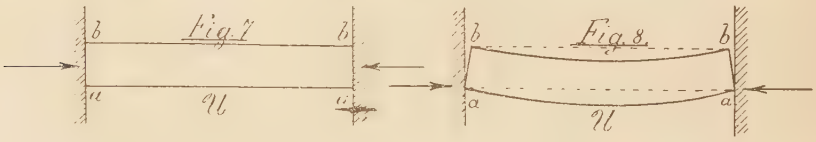
Teil der auf den Versuchsstab No. 12 bezüglichen Ermittelungen angeführt.

Belastung P kg	$P : F$ kg/qcm	Ausbiegung in der Mitte mm
0	0	0,00
200	19	0,00
400	38	0,04
600	57	0,11
800	76	0,20
1000	95	0,34
2000	190	1,25
3000	284	3,88
3200	303	5,08
3400	322	6,86
3600	341	9,92
3800	360	17,14

b) Die Versuchsstäbe liegen mit ihren ebenen Stirnseiten an den festen Druckplatten.

Die Vorgänge gestalten sich hier bei der Biegung weniger einfach als unter a. Zu der Schwierigkeit, den Stab so einzuspannen, dass die Richtung der Druckkraft mit der Stabaxe zusammenfällt, tritt die weitere hinzu, ein gleichmässiges Anlegen der Stirnflächen an die Druckplatten herbeizuführen und zu sichern.

Die Erfüllung der letzteren Bedingung musste sich naturgemäss als unmöglich erweisen. Sobald der Stab seine Ausbiegung — etwa nach U, Figur 7, hin — begonnen, hat er das Bestreben, sich bei bb von den Druckplatten zu lösen. Hiermit muss aber dann eine Aenderung der Verteilung des Druckes über die Stirnflächen eintreten: die Pressung wird hier von der Stabmitte aus gerechnet nach a hin wachsen, nach b hin abnehmen. Thatsäch-



lich beobachtete Bauschinger, dass sich am Schlusse des Versuches die Stirnflächen bis auf die bei a zusammengedrückten Kanten von den Druckplatten lösten, Figur 8.

Bei dieser Sachlage erscheint es nicht wahrscheinlich, dass es möglich sein werde, für Stäbe, welche mit ihren ebenen Stirnflächen an festen Druckplatten anliegen, den Vorgang rechnerisch genau zu verfolgen. Bauschinger hat deshalb zum Zwecke der weiteren Betrachtung seiner Versuchsergebnisse die Navier'sche Gleichung (8), § 4, nämlich

$$P_z = \frac{F \cdot k}{1 + \varkappa \cdot \frac{l^2}{r^2}}$$

herangezogen, unter k die Druckfestigkeit verstanden und hierfür 4500 kg gesetzt wird. Dann findet sich

a) für die in Spitzen gelagerten Stäbe $\varkappa$ schwankend zwischen 0,000 09 und 0,000 614,

b) für die Stäbe mit flachen Enden $\varkappa$ schwankend zwischen 0,000 041 und 0,000 31,

also überaus veränderlich.

Werden k und $\varkappa$ aus den Versuchsergebnissen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, so ergiebt sich

a. $k = 2270$ $\varkappa = 0{,}000\,058$,

b. $k = 3100$ $\varkappa = 0{,}000\,029$.

Die Fliess- oder Quetschgrenze war von Bauschinger für das untersuchte Eisen als schwankend zwischen 2150 und 3690 kg festgestellt worden.

Ferner weisen die Ergebnisse darauf hin, dass die aus Knickungsversuchen bestimmten Werte $\varkappa$ ebenfalls mit einem Sicherheitskoeffizienten multipliziert in die Rechnung einzuführen sind, ganz wie das bei k geschieht.

Die mit $k = 2270$ und $\varkappa = 0{,}000058$ berechneten Werte P_z für die Stäbe mit beweglichen Enden stimmen mit den beobachteten Werten nicht gerade gut überein; besser ist dies der Fall bei den mit $k = 3100$ und $\varkappa = 0{,}000029$ ermittelten Werten P_z für die Stäbe mit flachen Enden.

Auf Grund der Bauschinger'schen Versuche kann geschlossen werden:

a) für Stäbe mit drehbaren Enden ist die Euler'sche Formel (9), § 5, zutreffend, sofern die Beziehung für einfache Druckbeanspruchung befriedigt erscheint;

b) für Stäbe mit ebenen, an festen Druckplatten anliegenden Stirnflächen bietet die Navier'sche Formel (8), § 4, brauchbare Werte.

B. Versuche von v. Tetmajer.

Siehe: Schweizerische Bauzeitung 1887, Bd. X, S. 93 u. f.
„ „ 1888, Bd. XI, S. 110 u. f.

a) Versuche mit Schweiss- und Flusseisen in Rundstäben bis 5 cm Stärke.

(30 Stäbe Schweiss- und 30 Stäbe Flusseisen bearbeitet) Einspannung der Versuchsstangen zwischen Spitzen. v. Tetmajer fand:

1. Übereinstimmung der beobachteten Knickbelastungen mit denjenigen, welche sich auf Grund der Euler'schen Formel berechnen liessen;
2. Veränderlichkeit des Zerknickungskoeffizienten $\varkappa$, falls die Navier'sche Gleichung zu Grunde gelegt wird; es müsste dann sein

$$\varkappa = 0{,}000\,1 \sqrt{0{,}008\,67 \frac{l}{r} - 0{,}693\,6}$$

in

$$\frac{P_z}{F} = \frac{2650}{1 + \varkappa \cdot \frac{l^2}{r^2}}$$ für Flusseisen (2650 Fliessgrenze),

$$\frac{P_z}{F} = \frac{2350}{1 + \varkappa \cdot \frac{l^2}{r^2}}$$ für Schweisseisen (2350 Fliessgrenze).

b) Versuche mit Bauhölzern.

	Elasticitäts-modul	Druck-festigkeit	Bemerkungen
Lärche und Föhre im Durchschnitt	104230	318 kg	astfreies Holz
Rot- und Weisstanne . .	—	285 kg	astig

v. Tetmajer stellte zunächst für die zwischen Spitzen gelagerten Stäbe fest:

1. das gleiche wie unter a, Ziff. 1, genügend grosse Länge derselben vorausgesetzt,
2. die starke Veränderlichkeit von $\varkappa$, falls die Navier'sche Gleichung in Betracht gezogen wird:

$$\varkappa = 0{,}0001 \sqrt{0{,}05 \frac{l}{r} - 0{,}80}$$

in

$$\frac{P_z}{F} = \frac{318}{1 + \varkappa \frac{l^2}{r^2}}$$ für Lärche und Föhre,

$$\frac{P_z}{F} = \frac{285}{1 + \varkappa \frac{l^2}{r^2}}$$ für Rot- und Weisstanne.

Für die mit ebenen Stirnflächen an festen Druckplatten anliegenden Hölzer beobachtete v. Tetmajer den Abstand der Wendepunkte voneinander zwischen $0{,}5 l_0$ und $0{,}6 l_0$, sofern l_0 die Entfernung der beiden Druckplatten ist. Er empfiehlt, um sicher zu rechnen, in den soeben gegebenen Gleichungen $0{,}6 l_0$ für l einzuführen, im Übrigen jedoch nichts zu ändern.

Das Wachsen des Koeffizienten $\varkappa$ mit zunehmendem Verhältnisse $l : r$ bestätigen die von v. Tetmajer sowohl für Holz, als auch für Eisen erlangten Versuchsergebnisse.

Im Vorstehenden ist in Kürze dasjenige niedergelegt worden, was im wesentlichen über axiale Belastung stabförmiger Körper bekannt und erforscht ist.

Die auf dem Wege der Empirie oder durch Kombination ermittelten besonderen Formeln mussten für die praktische Verwertung herangezogen werden, weil die Ergebnisse der Forschungen als nicht ausreichend befunden wurden, obwohl das Problem von den hervorragendsten Mathematikern und Physikern behandelt wurde.

Wir werden bei unseren späteren Entwicklungen auf manche der bisherigen Darlegungen verweisen, sei es, um Vergleiche oder Schlüsse mit den neu entwickelten Resultaten zu ziehen, oder sei es deshalb, um weitere Erklärungen daselbst unnötig zu machen.

Im folgenden zweiten Abschnitte soll nun versucht werden, das in Frage stehende Problem auf theoretischem Wege einer neuen Lösung zuzuführen.

II. Abschnitt.

Die neue Theorie.

§ 7.

Einleitung.

In einer Ebene befinde sich ein System von Kräften, die sich gegenseitig das Gleichgewicht halten, die Ebene sei Mittelebene eines geraden, prismatischen Körpers von symmetrischem Querschnitt. Sie teilt also jeden Querschnitt in zwei symmetrische Hälften. Durch Einwirkung der Kräfte wird erfahrungsgemäss eine Formänderung des Körpers geschehen, und um letztere zu untersuchen, sollen folgende Voraussetzungen über den Körper gemacht werden: Er sei zusammengesetzt aus parallel zu einander liegenden Fasern, welche ihrerseits als materielle Linien angesehen werden sollen und von denen jede einen unendlich kleinen Querschnitt hat. Solch einen Körper, zusammengesetzt aus parallelen Fasern von unendlich kleinen Querschnitten, nennen wir einen geraden Stab oder eine Säule.

Wirkt in Richtung einer solchen Faser eine Kraft, die wegen des unendlich kleinen Querschnittes der Faser auch als unendlich klein angesehen werden muss, so soll infolge ihrer Einwirkung eine Längenänderung der Faser eintreten, und diese ist entweder eine Ausdehnung oder Verkürzung, je nachdem die Kraft auf die Faser ziehend oder drückend wirkt. Die Kraft soll ferner in einer gewissen Beziehung zu den Dimensionen der Faser stehen, sie soll also abhängig sein, erstens vom Querschnitte, zweitens von der Länge, drittens von der Längenänderung und viertens von einer Konstanten, dem sogenannten Elasticitätsmodul, der aus der Natur des zu untersuchenden Körpers sich ergiebt. Diese erfahrungsgemäss festgestellte Beziehung ist folgende: Heisst dP die unendlich kleine Belastung, l die Länge, $\triangle l$ die Längenänderung der

Faser, ist ferner dF der letzteren unendlich kleiner Querschnitt und E der Elasticitätsmodul, so ist:

$$dP = \pm \frac{\triangle l}{l} \cdot E \cdot dF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Hierin ist dP eine Zugkraft, wenn das positive Vorzeichen, es ist eine Druckkraft, wenn das negative Vorzeichen gilt. Da der Elasticitätsmodul, wie Versuche zeigen, innerhalb der Elasticitätsgrenze oder richtiger Proportionalitätsgrenze, für beide Fälle gleich ist, so wird unsere Untersuchung nur innerhalb der Proportionalitätsgrenze Geltung haben.

Die obige Formel sagt aus: Die Belastung ist proportional der Längenveränderung, dem Querschnitte und dem Elasticitätsmodul und umgekehrt proportional der Faserlänge.

Dividieren wir die Belastung durch den Faserquerschnitt, so erhalten wir die Belastung auf die Flächeneinheit der Faser. Diese Belastung soll mit σ bezeichnet und Spannung genannt werden. Es ist also

$$\frac{dP}{dF} = \pm \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Je nachdem sie eine Zug- oder eine Druckspannung ist, soll sie positiv oder negativ genommen werden.

Das Verhältnis $\frac{\triangle l}{l}$ bezeichnet man als die spezifische Dehnung oder Verkürzung, wählt man dafür den Buchstaben ε, so kann man Gleichung (12) auch schreiben:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \alpha \sigma \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

wenn man den reciproken Wert des Elasticitätsmoduls E, mit α, dem Dehnungskoeffizienten, bezeichnet.

Die spezifische Dehnung ist als Verhältnis zweier Längen eine unbenannte Zahl, d. h. sie hat die Dimension Null. Daraus folgt, dass E eine Grösse von der gleichen Art wie σ sein muss, also eine spezifische Spannung bedeutet.

Das durch Gleichung (12) oder (14) ausgesprochene Gesetz trifft nicht genau für jedes Material zu, wie man früher und auch jetzt zuweilen noch fälschlich annimmt. Es wurde das Elasticitäts-

gesetz genannt; da dieses Gesetz aber nicht allgemein gültig ist, gebraucht man besser eine weniger allgemeine Bezeichnung dafür. Es soll daher das Hooke'sche Gesetz genannt werden, da es zuerst von dem Physiker Hooke in der Form „ut tensio sic vis“ aufgestellt wurde.

Um das Elasticitätsgesetz für solche Körper, die dem Hooke'schen Gesetze nicht genau folgen, durch eine Formel auszusprechen, muss man an Stelle von Gleichung (14) allgemeiner

$$\varepsilon = f(\sigma) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

setzen, wo f irgend eine Funktion ist. Der Begriff des Elasticitätsmoduls verliert hier seine ursprüngliche Bedeutung. Da man aber daran gewöhnt ist, das Verhalten der dem Hooke'schen Gesetze gehorchenden Körper als das normale zu betrachten, Gleichung (15) daher stets mit Gleichung (14) zu vergleichen, spricht man indessen auch bei den Körpern, die dem allgemeinen Gesetze $\varepsilon = f(\sigma)$ folgen, von einem Elasticitätsmodul.

Differentiirt man nämlich Gleichung (15) nach σ, so erhält man

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{f'(\sigma)} = T, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

und der Wert auf der rechten Seite geht für den Fall des Hooke'schen Gesetzes in den Elasticitätsmodul über.

Die Grösse T kann auch geometrisch erläutert werden mit Hülfe der Richtung einer Tangente, die an die Kurve in Figur 9 im Punkte ε,σ gelegt wird.

Es ist offenbar

$$T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \operatorname{tg} \varphi.$$

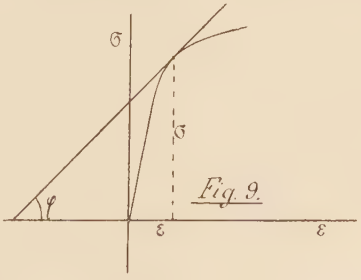


Fig. 9.

Für die weitere Verwendung ist es nützlich, die Form der Funktion f in Gleichung (15) so zu bestimmen, dass sie sich hinreichend genau den Versuchsergebnissen anschliesst.

In einer Abhandlung von Mehmke in der Zeitschrift für Mathematik und Physik 1898 sind die verschiedenen Gleichungen zusammengestellt, mittels derer schon versucht worden ist, das

wirkliche Gesetz $\varepsilon = f(\sigma)$ für die einzelnen Stoffe darzustellen. Es seien hier erwähnt:

1. Die Potenzengleichung $\varepsilon = a\sigma^m$, die bereits im Jahre 1729 von Bülffinger, 1822 von Hodgkinson und neuerdings von v. Bach und Schüle empfohlen ist;
2. die parabolischen Gleichungen $\sigma = a\varepsilon - b\varepsilon^2$ (Hodgkinson 1849 für Gusseisen, Hartig 1893 für Gusseisen, Cement und Cementmörtel) und $\varepsilon = a\sigma + b\sigma^2$;
3. die hyperbolische Gleichung $\varepsilon = \frac{\sigma}{a - b\sigma}$ (Cox 1850 für Gusseisen, Lang[1]) 1896 für Gusseisen, Steine, Mörtel);
4. die Gleichung der kubischen Parabel $\sigma = a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c\varepsilon^3$ (Cox 1850 für Gusseisen).

Mehmke wendet die vorstehenden Gleichungen auf die von v. Bach[2]) veröffentlichten Versuche an und findet, dass die kubische Parabel mit ihren drei Konstanten sich diesen am besten anschliesst, von den Gleichungen mit nur zwei Konstanten jedoch die Potenzengleichung. Doch dürften auch die zwei anderen Gleichungen, die parabolische und die hyperbolische, ebenfalls noch den von der Anwendung geforderten Genauigkeitsgrad besitzen.

Wir wollen hier nur erwähnen, dass für ein bestimmtes Gusseisen in der Potenzengleichung

$$\varepsilon = a\sigma^m \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

für Zug: $a = \frac{1}{1381700}$, $m = 1{,}0663$

für Druck: $a = \frac{1}{1132700}$, $m = 1{,}395$

gefunden wurden.

Gegen die Formel (17) lässt sich ein theoretisches Bedenken nicht unterdrücken, denn die Konstante a ist eine Grösse, von der

---

[1]) Lang berücksichtigt in seiner Formel auch noch den Einfluss der Temperatur t und setzt allgemein $\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0 - ct - d\sigma}$ (s. „Der Schornsteinbau" 1896). Daselbst findet sich auch eine sehr vollständige Zusammenstellung der bis dahin bekannt gewordenen Versuchsergebnisse über den Zusammenhang von σ und ε.

[2]) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1896, S. 1381 u. 1897 S. 241; vergl. Z. 1898 S. 35.

man a priori gar nicht wissen kann, welche physikalische Dimension ihr beizulegen ist. Von der Dimension cm^2/kg, wie ein Dehnungskoeffizient, kann sie natürlich nur für $m = 1$ sein. Wollte man diese Bedeutung von α ein für alle Male festhalten, so wäre Gleichung (17) überhaupt nicht mehr homogen in Bezug auf die Dimensionen, hätte also keinen physikalischen Sinn. Ist der Exponent m bestimmt, der nur eine absolute Zahl sein kann, folgt zwar die Dimension von α, doch lässt sie sich nur in gebrochenen Potenzen der Längen- und Krafteinheit ausdrücken und dann kann α mit anderen physikalischen Grössen nicht verglichen werden. Das Bedenklichste aber ist dabei, dass die Dimension von α von einer Materialsorte zur anderen wechseln würde. Jedenfalls kann Gleichung (17) nur die Bedeutung einer Interpolationsformel in Anspruch nehmen; als allgemeine Grundlage für die mathematische Theorie der Elasticität solcher Körper eignet sie sich nicht: dies könnte eher von der Lang'schen Formel zutreffen, worin der Koeffizient b eine absolute Zahl ist.

Bisher sind auch in der Festigkeitslehre weitergehende Schlüsse immer nur an das Hooke'sche Gesetz geknüpft worden und nicht an die letzterwähnten Spannungsformeln.

Es erscheint auch ziemlich aussichtslos, auf einem solchen Wege jemals zu genaueren Aufschlüssen über das Verhalten jener Körper zu gelangen. Wir werden daher auch in der Folge die allgemeinen Untersuchungen nur unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes durchführen, dabei aber eingedenk sein, dass die erlangten Resultate für Gusseisen, Steine etc. nicht genau zutreffen werden. Nachträglich müsste man dann, durch Versuche oder durch die genannten Spannungsformeln festzustellen suchen, wie weit die Wirklichkeit von den errechneten Resultaten abweicht. Wir kehren zu dem zu untersuchenden Körper zurück und machen ferner die Voraussetzung, dass die Fasern infolge der Einwirkung der Kräfte sich biegen können und, wenn sie ursprünglich parallel waren, dann gebogen zu einander äquidistante Kurven bilden. Legen wir deshalb in einem Punkte einer gebogenen Faser eine Normalebene, so ist diese eine solche zugleich für sämtliche übrigen Fasern. Ferner soll künftig unter der Schnittfläche einer Normalebene mit dem Körper der „Querschnitt“ verstanden werden.

Weil nun zwei Querschnitte infolge des Parallelismus der Fasern auch parallel sind, werden dieselben nach der Biegung des Körpers in einer geraden Linie sich schneiden; und liegen sie unendlich nahe, so befinden sich auf der Durchschnittslinie die Krümmungsmittelpunkte sämtlicher Faserelemente zwischen den genannten Querschnitten.

In dem eben Gesagten ist auch folgendes enthalten:

Dieselben Faserelemente, die zwischen den ursprünglich parallelen Querschnitten sich befanden, sind auch im gebogenen Zustande zwischen ihnen vorhanden. Hieraus ergiebt sich aber, dass ein Teil der Faserelemente ausgedehnt, ein anderer Teil zusammengedrückt worden ist und dass zwischen beiden Teilen sich eine Schicht von Faserelementen befindet, die weder ausgedehnt noch zusammengedrückt, sondern nur gebogen ist. Wir nennen dieselbe die neutrale Faserelementenschicht. Weiterhin sind alle gleichviel ausgedehnten und zusammengedrückten Fasern von der Krümmungsaxe gleich weit entfernt. Dasselbe gilt von den Fasern der neutralen Faserschicht. Deshalb schneidet auch die Ebene, in welcher sich die Elemente der neutralen Faserschicht befinden, jeden Querschnitt in einer geraden Linie, von denen wir jede die neutrale Axe des Querschnittes, in welchem sie sich befindet, nennen werden.

Da nun die neutrale Axe zur Krümmungsaxe parallel liegt, so ergiebt sich hieraus das folgende Resultat:

„Alle Faserelemente, welche gleichviel ausgedehnt oder zusammengedrückt werden, sind von der neutralen Axe gleich weit entfernt.“ In ihrer Gesamtheit bildet also jede gleichviel ausgedehnte oder gleichviel zusammengedrückte Faserelementenschicht ein cylindrisches Flächenelement, welches von den Querschnitten geradlinig geschnitten wird.

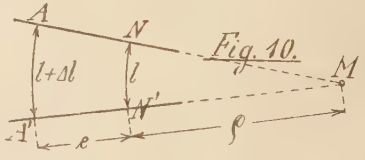


Fig. 10.

In Figur 10 sei M der Krümmungsmittelpunkt zweier Faserelemente NN' und AA', von denen NN' das neutrale Faserelement und AA' ein ausgedehntes sein möge. Es sind dann AN und $A'N'$ die Spuren zweier Querschnitte. Bezeichnen wir nun den Krümmungsradius des neutralen Faserelementes mit ϱ und die Entfernung des Faserelementes AA' von dem neutralen Faserelement NN' mit e,

so ist zunächst infolge der Ähnlichkeit der unendlich schmalen Dreiecke AMA' und NMN', mit Bezug auf die eingezeichneten Längen in der Figur und wenn l die ursprüngliche Länge des Faserelementes ist:

$$\frac{\triangle l + l}{l} = \frac{\varrho + e}{\varrho}$$

oder:

$$\frac{\triangle l}{l} = \frac{e}{\varrho} .$$

Gleichlautend ist die vorstehende Gleichung, wenn AA' ein zusammengedrücktes Faserelement wäre.

Nach Formel (12) ist nun $\frac{\triangle l}{l} = \pm \frac{dP}{dF} \cdot \frac{1}{E}$,

deshalb entsteht

$$\frac{e}{\varrho} = \pm \frac{dP}{dF} \cdot \frac{1}{E} .$$

Wir erhalten also

$$dP = \pm \frac{e}{\varrho} E \cdot dF , \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

und da nach Gleichung (13)

$$\frac{dP}{dF} = \pm \sigma$$

ist, so auch

$$\sigma = \frac{E}{\varrho} e \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Je nachdem nun e positiv oder negativ ist, bedeutet σ eine Zug- oder Druckspannung.

Aus der letzten Formel erkennt man, dass eine Faser desto mehr ausgedehnt oder zusammengedrückt wird, je weiter sie von der neutralen Axe entfernt liegt. Die Fasern, welche sich am weitesten von der neutralen Axe befinden, das sind die sogenannten äussersten Faserschichten — werden demnach am meisten beansprucht. Hier darf also für praktische Anwendung σ höchstens einen gewissen zulässigen Wert erreichen, den wir Sicherheitsmodul nennen wollen.

Bezeichnen wir den Sicherheitsmodul mit k und nennen die Entfernung der neutralen Axe von jeder der äussersten (gezogenen

oder gedrückten) Faserschichten a, so wäre demnach nach Gleichung (19)

$$k = \frac{E}{\varrho} a \ , \ldots \ldots \ldots

gerichtet. Ferner ist Z gleich der Summe der inneren Kräfte. Wir erhalten also

$$Z = \int dP.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung (18) entsteht

$$Z = \int \frac{E}{\varrho} e \cdot dF \ .$$

In diesem Integrale ist $\frac{E}{\varrho}$ eine Konstante, so dass wir auch schreiben können

$$Z = \frac{E}{\varrho} \int e \cdot dF \ .$$

Bezeichnen wir weiter den Flächeninhalt der durch Zugkräfte beanspruchten Fläche des Querschnittes mit F_z und die Entfernung ihres Schwerpunktes von der neutralen Axe mit z, so ist bekanntlich

$$\int e \cdot dF = F_z \cdot z \ .$$

Hieraus folgt

$$Z = \frac{E}{\varrho} F_z \cdot z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Auf analoge Weise wird, wenn mit F_d die durch Druckkräfte beanspruchte Fläche des Querschnittes, mit d die Entfernung ihres Schwerpunktes von der neutralen Axe und mit D die Kraft bezeichnet wird, die den Druckspannungen Widerstand leistet, gefunden

$$D = \frac{E}{\varrho} F_d \cdot d \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Es steht auch D normal zum Querschnitte, ist also der Kraft Z parallel, aber ihr entgegengesetzt gerichtet.

Was endlich die Kraft A anbelangt, so ist sie im Querschnitte selbst wirksam, sie verhindert also ein Verschieben der Fasern im Querschnitte und ein schliessliches Abscheren.

Wir bringen nunmehr die äusseren und die inneren Kräfte miteinander in Verbindung.

Die äusseren Kräfte ergeben entweder eine resultierende Kraft oder ein resultierendes Kräftepaar.

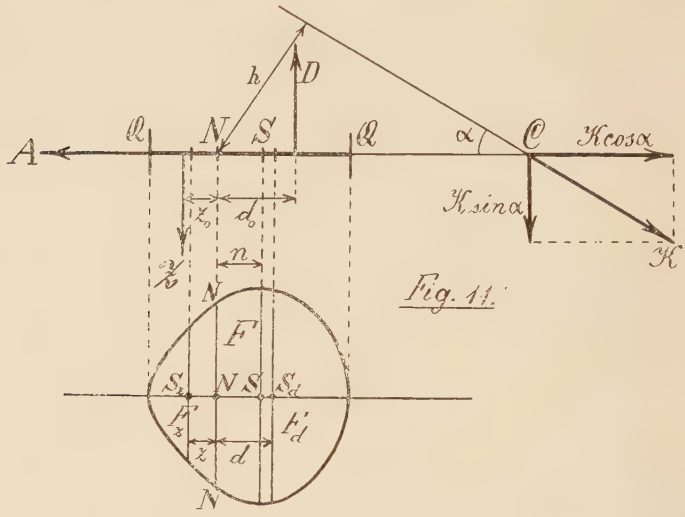


Fig. 11.

a) Ergeben sie das letztere, so ist $A = 0$ und $Z = D$. In diesem Falle ist jedoch nach den Gleichungen (21) und (22)

$$F_z \cdot z = F_d \cdot d \ ,$$

d. h. die Schwerlinie des Querschnittes, die rechtwinklig zur Kraftebene liegt, ist zugleich neutrale Axe des Querschnittes.

b) Ergeben die äusseren Kräfte eine Resultante, die wir K nennen wollen, so müssen wir sie in ihrem Durchschnittspunkte C mit der Spur des Querschnittes QQ in zwei Komponenten zerlegen, Figur 11. Ist α der Winkel, den K mit QQ einschliesst, so ist die im Querschnitte liegende Komponente $K \cos \alpha$, die andere normal zum Querschnitte gerichtete Komponente $K \sin \alpha$. Es muss nun sein:

$$A = K \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

und

$$D - Z = K \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (21) und (22), erhalten wir also

$$D - Z = \frac{E}{\varrho} \cdot \left[F_d \cdot d \ - F_z \cdot z \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Ist nun F der Inhalt der gesamten Querschnittsfläche und n ihr Schwerpunktsabstand von der neutralen Axe, so ist

$$F \cdot n = F_d \cdot d - F_z \cdot z \ ,$$

und es entsteht hiermit aus den Gleichungen (24) und (25)

$$K \sin \alpha = - \frac{E}{\varrho} F \cdot n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Diese Gleichung sagt aus: Im allgemeinen Falle fällt die neutrale Axe mit der Schweraxe des Querschnittes nicht zusammen. Wenn jedoch die Resultante parallel zum Querschnitte liegt, d. h. wenn $\alpha = 0$ ist, geht die neutrale Axe durch den Querschnittsschwerpunkt, weil nach Gleichung (26) dann auch n gleich Null sein muss.

Die Kraft A ist, wie wir schon hervorgehoben haben, im Falle eines Kräftepaares gleich Null und in dem Falle, wenn die Resultante parallel zum Querschnitte liegt, ein Maximum, nämlich gleich K. Weicht die Kraftrichtung der Resultante K sehr wenig von der Normalen zum Querschnitte ab, d. h. ist $\cos \alpha$ sehr klein, so kann man, ohne einen sehr bedeutenden Fehler zu machen, A gleich Null setzen. — Dies findet in der excentrischen Zug- und Druckbelastung statt.

Die Gegenkraft von A verhindert, dass die Fasern aus ihrer Äquidistanz heraustreten, sie ist also gewissermassen ein Bindemittel zwischen den einzelnen Fasern.

Indem wir in der Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen fortfahren, haben wir zwei verschiedene Fälle abzuhandeln, nämlich erstens, wenn die äusseren Kräfte eine Resultante und zweitens, wenn dieselben ein Kräftepaar ergeben.

I. Heisst h der Abstand der Resultante von der neutralen Axe, und sind z_0 und d_0 die Abstände der Kräfte Z und D von der neutralen Axe, so muss sein

$$K \cdot h = Z \cdot z_0 + D \cdot d_0 \ .$$

Est ist jedoch $Z \cdot z_0 + D \cdot d_0 = \int \frac{E}{\varrho} e \cdot e \cdot dF \ ,$

oder auch da $\frac{E}{\varrho}$ eine Konstante ist,

$$Z \cdot z_0 + D \cdot d_0 = \frac{E}{\varrho} \int e^2 \cdot dF \ .$$

Das Integral, welches sich auf die Gesamtfläche des Querschnittes bezieht, führt in Bezug auf die neutrale Axe den Namen Trägheitsmoment. Wir wollen es mit J_n bezeichnen und erhalten aus der letzten Gleichung

$$K \cdot h = \frac{E}{\varrho} J_n$$

Ist J_s das Trägheitsmoment in Bezug auf eine zur neutralen Axe parallelen Schweraxe, so besteht bekanntlich die Relation

$$J_n = J_s + F n^2$$

wenn, wie schon erwähnt worden ist, n den Abstand beider Axen bedeutet. Es entsteht demnach

$$Kh = \frac{E}{\varrho} \left[J_s + F n^2 \right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Bezeichnet man nun mit r den sogenannten Trägheitsradius in Bezug auf die genannte Schweraxe, so ist

$$J_s = F r^2$$

zu setzen und es ergiebt sich dann aus Gleichung (27)

$$Kh = \frac{E}{\varrho} F \left[r^2 + n^2 \right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Division mit der Gleichung (26)

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{r^2 + n^2}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Die beiden Gleichungen (26) und (29) sind für die Folge von Wichtigkeit.

II. Im Falle des Kräftepaares erhält Gleichung (27), indem man statt Kh das Moment des Kräftepaares, welches wir M nennen wollen, und ferner $n = 0$ setzt, folgende Gestalt

$$M = \frac{E J_s}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Wir gehen zur Ermittelung der Tragkraft des Körpers über und haben bei dieser Bestimmung wieder die Fälle zu unterscheiden, ob die gegebenen Kräfte des einen Körperteiles eine resultierende Kraft oder ein resultierendes Kräftepaar hervorbringen.

Nach Gleichung (20) ist

$$\frac{k}{a} = \frac{E}{\varrho}$$

Setzen wir diesen Wert von $\frac{E}{\varrho}$ in Gleichung (26) ein, so erhalten wir

$$K \sin\alpha = \frac{k}{a} Fn \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Ist nun η die Entfernung des Querschnittsschwerpunktes von der äussersten gedrückten beziehungsweise gezogenen Faser, so kann $\pm \eta + n$ statt a in Gleichung (31) gesetzt werden; $\eta + n$ ist dann die Entfernung der neutralen Axe von der äussersten gedrückten Faser und $\eta + n$ die Entfernung der neutralen Axe von der äussersten gezogenen Faser. Hat dann die Kraft K die in Figur 11 angegebene Richtung, so entsteht aus letzter Gleichung

$$K \sin\alpha = \frac{-kFn}{\pm\eta + n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Ist dagegen die Kraft der in Figur 11 angegebenen Richtung entgegengesetzt gerichtet, so ist

$$K \sin\alpha = \frac{+kFn}{+\eta + n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Die beiden Formeln (32) und (33) geben die Tragkraft des Körpers an, wenn sich die äusseren Kräfte zu einer Resultante vereinigen lassen.

In dem Falle, wenn die gegebenen Kräfte ein Kräftepaar hervorbringen, setze man, da sich aus den Gleichungen (32) und (33) ein unbestimmter Wert ergeben würde, da sowohl K als auch n gleich Null ist, statt $\frac{E}{\varrho}$ den Wert $\frac{k}{a}$ in Gleichung (30) ein und erhält dann

$$M = \frac{kJ_s}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Ist endlich die Resultante K parallel zum Querschnitte, so muss man wieder eine besondere Formel zur Bestimmung der Tragkraft des Körpers bilden, weil aus den Gleichungen (32) und

(33) unbestimmte Werte sich ergeben, da sowohl α als auch n gleich Null ist. Weil in diesem Falle $n = 0$ ist, so resultiert aus Gleichung (27)

$$Kh = \frac{EJ_s}{\varrho},$$

und weil $\frac{E}{\varrho} = \frac{k}{a}$ ist, so entsteht zur Bestimmung der Tragkraft die Gleichung

$$Kh = \frac{kJ_s}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Die besonderen Fälle, wo aus den gegebenen Kräften entweder ein Kräftepaar oder eine Resultante parallel zum Querschnitte entsteht, gehören übrigens der sogenannten relativen Festigkeit an. Dieselben sind nur des Zusammenhanges wegen hier erwähnt worden und werden ferner nicht mehr berücksichtigt werden.

§ 9.

Kritik der bisherigen Theorie.

Der Körper soll nunmehr durch eine solche Belastung K in Anspruch genommen werden, welche parallel zu den Fasern liegt. Ferner soll derjenige Querschnitt, der unmittelbar unterstützt ist und Endquerschnitt heisst, so liegen, dass auch nach erfolgter Durchbiegung die Belastung senkrecht zu ihm gerichtet ist. Dann sind auch die Faserelemente nach erfolgter Durchbiegung im Endquerschnitte parallel zur Belastung gerichtet.

Der Querschnitt, auf welchem sich unmittelbar die Belastung befindet, heisse der Anfangsquerschnitt des Körpers.

In dieser Anordnung bezeichnen wir den Körper als „auf excentrische Zug- oder Druckfestigkeit" in Anspruch genommen, wenn nota bene die Belastung nicht in dem Schwerpunkte des Anfangsquerschnittes wirksam ist. Ist die Belastung vom Endquerschnitte nach dem Anfangsquerschnitte hin gerichtet, so ist der Körper auf excentrische Zugfestigkeit, im entgegengesetzten Falle auf excentrische Druckfestigkeit in Anspruch genommen.

Wir wollen die Entfernung des Schwerpunktes von der Belastung im Anfangsquerschnitte p nennen und zunächst eine für später wichtige Gleichung für p entwickeln. Zu diesem Zwecke sei in Figur 12 NN' ein Teil der neutralen Faser in der Kraftebene und SS' ein Teil der Schwerlinie des Körpers. K sei die Belastung, die nach unserer Voraussetzung zur ungebogenen Faser parallel liegt. Es ist dann S der Schwerpunkt des Anfangsquerschnittes und weiter ist $SC = p$ und $NS = n$.

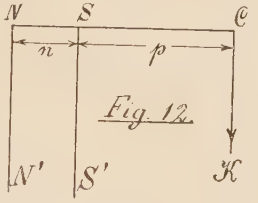


Fig. 12.

Die Linie SC sei als absolut unbiegsamer, gewichtsloser materieller Hebel gedacht. Der Hebel sei ferner mit dem Körper in fester Verbindung. Nach erfolgter Durchbiegung mögen NN' und SC die in Figur 13 gezeichnete Gestalt annehmen; dann ist SC unverändert lang geblieben; dasselbe gilt von NS, weil wir ja die Kraft A, welche die Fasern schliesslich abzuscheren bestrebt ist, wegen der sehr geringen Durchbiegung vernachlässigen dürfen und weil deswegen die unbedeutende Veränderung des Querschnittes unbeachtet gelassen wird. Man fälle in Figur 13 von N auf die Kraftrichtung von K die Normale NB, alsdann ist

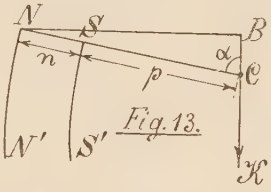


Fig. 13.

$$NB = (p + n) \sin\alpha \,.$$

Nun ist jedoch $NB = h$, vergleiche Figur 11, und nach Gleichung (29)

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{r^2 + n^2}{n} \,.$$

Aus beiden Gleichungen entsteht die Relation

$$p = \frac{r^2}{n} \,. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Aus dieser Gleichung lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

Angenommen, die Belastung wirke ausnahmsweise im Schwerpunkte des Anfangsquerschnittes, so ist $p = 0$, was zur Folge hat, dass nach Gleichung (36) $n = \infty$ ist. Hieraus resultiert nach Gleichung (26) dann weiter, dass auch $\varrho = \infty$ sein muss, das heisst mit anderen Worten: „Befindet sich die Belastung im Schwer-

punkte des Anfangsquerschnittes, so kann durchaus keine Durchbiegung stattfinden.“ Die Tragkraft ergiebt sich dann nach Gleichung (32), (33) mit

$$K = \pm k F .$$

Die neutrale Faserschicht würde, wenn möglich, sich in der Unendlichkeit befinden, und alle Fasern sind daher entweder alle gleich viel ausgedehnt oder gleich viel zusammengedrückt.

Hiermit ist unwiderleglich bewiesen, dass, wenn die Last genau im Schwerpunkte des Anfangsquerschnittes angreift, durchaus keine Durchbiegung der Fasern stattfindet, die Länge des Körpers möge sein, wie sie wolle; nur müssen die Schwerpunkte aller Querschnitte des Körpers auf ein und derselben Faser sich befinden.

Wir erwähnten diesen Fall deshalb ausführlich, weil die Theorie der Zerknickungsfestigkeit darauf basiert, dass bei Stäben, die im Verhältnis zu den Dimensionen der Querschnitte sehr lang sind, doch Durchbiegung stattfinden könne, und weil dieselbe dann hieraus durch Anwendung unpassender Formeln unrichtige Resultate erzielt. Demnach bleibt uns nur übrig, für die Zerknickungsfestigkeit anzunehmen, dass die Durchbiegung vermittelst eines Hebels p herbeigeführt würde. Deswegen ist, wie wir im Vorwort gesagt haben, die Zerknickungsfestigkeit identisch mit der excentrischen Druckfestigkeit.

Wir gehen nunmehr dazu über, den Nachweis zu erbringen, dass die bisherige Theorie der excentrischen Zug- und Druckbelastung gerader Stäbe unrichtig ist.

Aus der Gleichung (36) folgt

$$n = \frac{r^2}{p} .$$

Man setze diesen Wert von n in die Gleichung (26) ein, so entsteht

$$K \sin\alpha = \frac{E F r^2}{\varrho\, p} ,$$

oder auch, da $F r^2 = J_s$ ist,

$$K p \sin\alpha = \frac{E J_s}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Hat nun der Körper überall denselben Querschnitt, wie wir vorausgesetzt haben, so dass für sämtliche Querschnitte J_s eine

Konstante ist, so können die neutrale Faser (falls sie als vorhanden vorausgesetzt wird) in der Kraftebene und die Verbindungslinie der Querschnittsschwerpunkte, die wir der Kürze halber „schwere Linie" nennen wollen, äquidistante Kurven nicht sein, weil nach Gleichung (36), in der r eine Konstante ist, mit p auch n variabel sein muss. Die schwere Linie kann demnach eine Faser nicht sein; deswegen ist, weil die neutrale Faser im ungebogenen Zustande gerade ist, die schwere Linie keine gerade Linie, sondern eine Kurve, und daher darf der Körper im ungebogenen Zustande streng genommen keine geradcylindrische Gestalt haben, sondern muss ringartig gestaltet sein. Die Gestalt des Körpers wird dadurch bestimmt, dass eine unveränderliche Fläche parallel zu einer festen Ebene sich so bewegt, dass ihr Schwerpunkt immer auf einer Kurve, nämlich der schweren Linie (und nicht auf einer geraden Linie) bleibt.

Ferner haben aber die beiden Kurven auch nicht eine und dieselbe Evolute im gebogenen Zustande; denn dies könnte nur dann der Fall sein, wenn sie äquidistant wären. Heisst also ϱ_s der Krümmungsradius der Verbindungslinie der Querschnittsschwerpunkte, so ist streng genommen

$$\varrho_s \gtrless \varrho + n \,.$$

(Das positive Zeichen gilt für excentrische Zugbelastung, das negative Zeichen für excentrische Druckbelastung.)

Wir wollen hier, wie später, immer voraussetzen, dass K eine excentrische Druckkraft des Körpers ist.

Bei sehr geringer Durchbiegung könnte man jedoch dann

$$\varrho_s = \varrho - n$$

angenähert setzen.

Ferner ist dann angenähert $\sin\alpha = 1$ anzunehmen und man erhält aus der Gleichung (37)

$$Kp = \frac{EJ_s}{\varrho_s + n} \,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

oder auch, da nach Gleichung (36) $n = \frac{r^2}{p}$ ist,

$$Kp = \frac{EJ_s}{\varrho_s + \frac{r^2}{p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

In Figur (14) sei SS' ein Teil der schweren Linie im gebogenen Zustande.

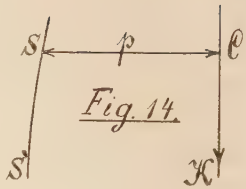


Fig. 14.

Nehmen wir die Kraftlinie von K als Abscissenaxe eines rechtwinkligen Koordinatensystems an, so ist die mit p zusammenfallende Linie die Ordinate, und Gleichung (39) könnte dann zur Auffindung der Gleichung der schweren Linie dienen.

Bisher bediente man sich jedoch nicht dieser Formel, sondern setzte

$$Kp = \frac{EJ_s}{\varrho_s} .$$

Man hat demnach das Glied $\frac{r^2}{p}$ vernachlässigt. In der Zerknickungsfestigkeit, wo man einen sehr geringen Hebel der Belastung annimmt, ist p eine sehr kleine Grösse, also $\frac{r^2}{p}$ eine sehr grosse Länge, die neben ϱ_s unberücksichtigt gelassen wurde. Die daraus abgeleitete Bestimmung der Belastung bei gegebenem Querschnitte und gegebener Länge des Körpers muss demnach ganz unrichtig sein, denn nur dann, wenn p sehr gross ist, könnte man $\frac{r_2}{p}$ unberücksichtigt lassen.

Hiermit ist die Unrichtigkeit der bisherigen Theorie nachgewiesen. Sie ergiebt für die Tragkraft K, wie leicht abzuleiten ist, zu grosse Werte.

Werfen wir nunmehr einen Rückblick auf den Inhalt des ersten Abschnittes, so erkennen wir, dass der Ansatz des Paragraphen 3, nämlich die Gleichung (1), infolge der Ergebnisse unserer neuen Theorie einen Fehler in sich birgt. Nur bei verhältnismässig grossem Hebelarme p, beziehungsweise $(p+\delta-y)$ für jeden beliebigen Querschnitt daselbst, wäre der Ansatz gestattet; und alle daraus entwickelten Gleichungen gelten nur unter ausdrücklicher Betonung, dass p bezw. $(p+\delta-y)$ daselbst einen verhältnismässig grossen Wert repräsentiert, denn nur dann wäre es gestattet, $\frac{r^2}{p}$ bezw. $\frac{r^2}{(p+\delta-y)}$ zu vernachlässigen. Es ist deshalb aber auch

direkt unrichtig, die daselbst entwickelten Gleichungen für den Wert $p=0$ gelten zu lassen, denn dann ist, abgesehen vom Anfangsquerschnitte, der Hebelarm $(\delta - y)$ der angreifenden Kraft, den Voraussetzungen geringer Durchbiegung δ gemäss, sehr klein, also durch die Vernachlässigung der Fehler wieder sehr gross.

Kehren wir zu unseren Untersuchungen zurück, so erkennen wir aus Gleichung (36), dass es bei verhältnismässig sehr kleinem Hebelarme p vorkommen kann, dass der neutrale Punkt des Querschnittes, d. h. der Schnittpunkt der neutralen Axe des Querschnittes mit der Kraftebene, d. i. zugleich eine Symmetrieebene des Querschnittes, auch ausserhalb des Querschnittes, d. h. ausserhalb des Körpers fallen kann. Dasselbe wäre dann auch mit der neutralen Faser der Fall, die alsdann eine „imaginäre neutrale Faser" genannt werden dürfte, da sie ausserhalb des Körpers fällt und also thatsächlich nicht vorhanden ist.

Die exakte Lösung des Problems.

Wollen wir das Problem der excentrischen Zug- oder Druckbelastung, also einschliesslich der Knickbelastung mit Hülfe der bisherigen Ermittelungen auf strenge Art lösen, so müssen wir die Gleichung der imaginären neutralen Faser aufstellen, indem wir aus Gleichung (29) entwickeln

$$n = \frac{h}{2 \sin \alpha} + \sqrt{\left(\frac{h}{2 \sin \alpha}\right)^2 - r^2} \; ;$$

diesen Wert von n in die Gleichung (26) einsetzen, wodurch wir erhalten

$$K \sin \alpha = \frac{EF}{\varrho} \left[\frac{h}{2 \sin \alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{h}{2 \sin \alpha}\right)^2 - r^2} \right] \quad \ldots \quad (40)$$

Sind nun h und x die Koordinaten der neutralen Faser in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so wäre in der Gleichung (40) noch einzusetzen

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2 h}{dx^2}} \text{ und } \sin \alpha = \frac{dx}{\sqrt{dh^2 + dx^2}} \; .$$

Wir erhielten dann eine Differentialgleichung, die durch zweifache Integration die Gleichung der neutralen Faser ergeben würde, und damit wäre das Problem gelöst.

Da nun die Aufstellung dieser Gleichung durch obige auszuführende Integration sehr umständlich ist, wollen wir im folgenden Paragraphen einen anderen Weg einschlagen, der uns zu praktisch brauchbaren Resultaten verhelfen wird.

---

§ 10.

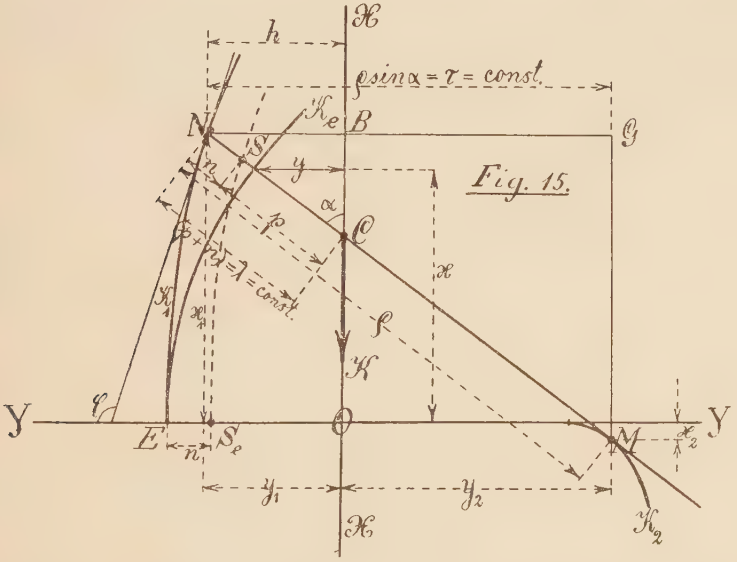
Die Durchbiegung und Tragkraft eines auf excentrische Zug- oder Druckfestigkeit beanspruchten geraden prismatischen Stabes.

In der bisherigen Theorie ist die stillschweigende Voraussetzung gemacht, dass es eine durch den ganzen Körper sich hinziehende Faserschicht gebe, welche weder ausgedehnt noch zusammengedrückt, sondern nur gebogen wird, die sogenannte neutrale Faserschicht. Diese Voraussetzung ist aber eine ganz ungerechtfertigte, durch nichts bestätigte Annahme. Im Gegenteil lässt sich sogar nachweisen, dass dies durchaus nicht allgemein der Fall zu sein braucht. Aber auch dann, wenn dem wirklich so wäre, würden die Fasern, die äquidistant zur neutralen Faserschicht liegen, nicht durchweg gleichgespannt sein, was doch zu erwarten wäre, wenn man die obige Annahme aufrecht erhält. Ziehen wir nämlich die Gleichung (19) in Betracht, so ist für eine zur neutralen Faser äquidistante Faser der Abstand e durchweg in allen Punkten derselben eine Konstante. Da darin aber auch E konstant, ϱ jedoch veränderlich ist, so muss unbedingt auch σ veränderlich sein, und zwar wird die Spannung desto grösser sein, je kleiner der Krümmungsradius ϱ ist. Nur wenn sich jede Faser in einem Kreisbogen biegt, sind in derselben die Spannungen in allen Punkten konstant.

Wir lassen demnach die erwähnte Annahme fallen und wollen uns nun der Lösung unseres Problems zuwenden.

Da nach unserer Voraussetzung der Körper ein gerader, prismatischer Stab ist, von symmetrischem Querschnitt, so sind alle Querschnitte des Stabes kongruent. Es kann nun weiter gefordert sein, dass in jedem Querschnitte der Schnittpunkt der neutralen Axe mit der Kraftebene, — gleichzeitig Symmetrieebene des Querschnittes —, der sogenannte neutrale Punkt des Querschnittes — von dem Querschnittsschwerpunkte die konstante Entfernung n habe. Es sind also die Grössen F, n und r als konstant zu betrachten.

In Figur (15) werde durch die Kurve K_1 der geometrische Ort der neutralen Punkte aller Querschnitte des Körpers dargestellt,



mit anderen Worten die Kurve K_1 ist die neutrale Linie, elastische Linie des Körpers. Da dieselbe im allgemeinen nicht äquidistant zu den Fasern zu sein braucht, da wir diese Annahme haben fallen lassen, so schneidet sie auch im allgemeinen die Querschnitte nicht normal. In der Figur 15 ist somit die Spur NC eines beliebigen Querschnittes nicht normal zur Kurve K_1.

Die Entfernung $NS = n$ des neutralen Punktes N eines beliebigen Querschnittes von dessen Schwerpunkt S ist also für jeden Querschnitt konstant. Daraus geht aber nicht hervor, dass neutrale Linie und Schwerlinie äquidistante Kurven sind; das wäre nur dann

der Fall, wenn die Spur NC des beliebigen Querschnittes für alle Punkte N normal zur Kurve K_1 wäre, infolgedessen der Krümmungsradius der Kurve K_1 im Punkte N mit NC zusammenfiele und dies gleichzeitig auch mit dem Krümmungsradius der Schwerlinie der Fall wäre. — Das im neutralen Punkte N des Querschnittes liegende Faserelement hat den Krümmungsradius $NM = \varrho$. Der Körper wird beansprucht durch die in Richtung XX — der ursprünglichen Faserrichtung des Stabes im ungebogenen Zustande — excentrisch zum Körper wirkende Kraft K. Sie schneidet den beliebigen Querschnitt im Punkte C. Der Krümmungsmittelpunkt M der durch den Punkt N gehenden Faser liege auf einer Kurve K_2 derart, dass MN Tangente der Kurve K_2 und dies für jede Lage des Krümmungsradius der Fall ist. Alsdann ist die Kurve K_2 die Evolute der durch den beliebigen Punkt N hindurchgehenden Faser; letztere demnach die Evolvente der Kurve K_2.

Berücksichtigen wir die Gleichung (26), so muss unserer Voraussetzung $n = Const.$ gemäss, auch sein

$$\varrho \sin\alpha = \frac{EFn}{K} = Const. = \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

In unserer Figur (15) müsste also NG eine konstante Grösse sein.

Weiterhin ist in der Gleichung (29) für $n = Const.$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{h}{\sin\alpha} &= \frac{r^2 + n^2}{n} = Const. = \lambda\ , \\ \text{d. h. in unserer Figur} \\ \frac{NB}{\sin\alpha} &= p + n = NC = Const. = \lambda\ . \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Die Lösung unseres Problems läuft also nach diesen Erwägungen auf die Lösung folgender geometrischen Aufgabe hinaus:

Es werden, Figur 15, zwei Kurven K_1 und K_2 gesucht, dass, wenn man von einem beliebigen Punkte N der Kurve K_1 an die Kurve K_2 die Tangente und durch den Berührungspunkt M die Parallele zu einer gegebenen Linie XX legt und ferner vom Punkte N auf diese Parallele die sie in G treffende Senkrechte konstruiert, letztere immer einer konstanten Grösse gleich ist, während die Entfernung des Punktes N von dem Schnittpunkte C von NM mit XX auch stets einer konstanten Grösse gleich ist.

Zum Zwecke der Lösung dieser Aufgabe liege mit XX zusammenfallend die X-Axe eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Die Y-Axe soll eine solche Lage haben, dass in ihr die Strecke NG und NC in eine gerade Linie fallen. Letzteres ist der Fall, wenn NM Normale der Axe XX wird.

Die Koordinaten eines Punktes N der Kurve K_1 seien x_1 und y_1 und die Koordinaten eines Punktes M der Kurve K_2 seien x_2 und y_2. Alsdann ist zunächst mit Rücksicht auf Gleichung (41)

$$y_1 + y_2 = \tau \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (43)$$

Wenn ferner B den Schnittpunkt der X-Axe mit NG bezeichnet, erhalten wir aus der Ähnlichkeit der Dreiecke NBC und NGM

$$\frac{NB}{NC} = \frac{NG}{NM} ,$$

oder auch

$$\frac{y_1}{\lambda} = \frac{\tau}{NM} ,$$

und da $NM = \sqrt{(NG)^2 + (GM)^2} = \sqrt{\tau^2 + (x_1 + x_2)^2}$

ist, so entsteht auch

$$\frac{y_1}{\lambda} = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + (x_1 + x_2)^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (44)$$

Ist ferner α derjenige Winkel, den die Tangente NM an die Kurve K_2 mit der X-Axe bildet, so ist einerseits

$$\sin \alpha = \frac{dy_2}{\sqrt{dx_2^2 + dy_2^2}} ,$$

anderseits $$\sin \alpha = \frac{y_1}{\lambda} .$$

Wir erhalten demnach

$$\frac{y_1}{\lambda} = \frac{dy_2}{\sqrt{dx_2^2 + dy_2^2}} ;$$

und weil nach Gleichung (43)

$$y_1 = \tau - y_2$$

ist, so ergiebt sich

$$\frac{\tau - y_2}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx_2}{dy_2}\right)^2 + 1}} ,$$

oder

$$1 + \left(\frac{dx_2}{dy_2}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{\tau - y_2}\right)^2 ,$$

d. h.

$$dx_2 = dy_2 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\tau - y_2}\right)^2 - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Nun ist

$$\sin \alpha = \frac{\tau - y_2}{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Durch Differentiation ergiebt sich hieraus

$$\cos \alpha \cdot d\alpha = - \frac{dy_2}{\lambda} ,$$

oder

$$dy_2 = - \lambda \cos \alpha \cdot d\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Die Gleichung (45) gewinnt nun bei Berücksichtigung der Gleichung (46) und (47) folgende Gestalt

$$dx_2 = - \frac{\lambda \cos^2 \alpha \cdot d\alpha}{\sin \alpha} ,$$

oder

$$\frac{dx_2}{\lambda} = - \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} d\alpha ,$$

d. h.

$$\frac{dx_2}{\lambda} = - \frac{d\alpha}{\sin \alpha} + \sin \alpha \cdot d\alpha$$

also

$$\int \frac{dx_2}{\lambda} = - \int \frac{d\alpha}{\sin \alpha} + \int \sin \alpha \cdot d\alpha$$

Führen wir die Integration aus, so erhalten wir

$$\frac{x_2}{\lambda} = - ln\, tg \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha + C_1 ,$$

worin C_1 eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet. Unter dem Zeichen *ln* ist der Logarithmus naturalis verstanden.

Mit Berücksichtigung der Relation

$$tg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} ,$$

entsteht weiterhin

$$\frac{x_2}{\lambda} = -\cos\alpha - \frac{1}{2} ln \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} + C_1 .$$

Da ferner nach Gleichung (46)

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\tau - y_2}{\lambda}\right)^2},$$

so geht die vorhergehende Gleichung über in

$$x_2 = -\sqrt{\lambda^2 - (\tau - y_2)^2} + \frac{1}{2}\lambda ln \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - (\tau - y_2)^2}}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - (\tau - y_2)^2}} + C_1 .$$

Nach der angenommenen Lage des Koordinatensystems ist $y_2 = \tau - \lambda$ für $x_2 = 0$; somit folgt aus letzter Gleichung, dass die Integrationskonstante $C_1 =$ Null ist.

Die Gleichung der verlangten Kurve K_2 lautet demnach

$$x_2 = -\sqrt{\lambda^2 - (\tau - y_2)^2} + \frac{1}{2}\lambda ln \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - (\tau - y_2)^2}}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - (\tau - y_2)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Da nach Gleichung (43)

$$\tau - y_2 = y_1$$

ist, so hat man auch

$$x_2 = -\sqrt{\lambda^2 - y_1^2} + \frac{1}{2}\lambda ln \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - y_1^2}}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - y_1^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Nun ist nach Gleichung (44)

$$\tau^2 + (x_1 + x_2)^2 = \frac{\tau^2 \lambda^2}{y_1^2},$$

d. h.

$$x_1 + x_2 = \sqrt{\frac{\tau^2}{y_1^2}(\lambda^2 - y_1^2)}$$

oder

$$x_2 = -x_1 + \frac{\tau}{y_1}\sqrt{\lambda^2 - y_1^2}$$

Hiernach entsteht, indem wir in Gleichung (49) den für x_2 gefundenen Wert einsetzen,

$$-x_1 = -\sqrt{\lambda^2 - y_1^2}\left(1 + \frac{\tau}{y_1}\right) + \frac{1}{2}\lambda \ln \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - y_1^2}}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - y_1^2}} \quad , \quad (50)$$

als die Gleichung der Kurve K_1.

Ausser diesen beiden Kurven K_1 und K_2 ist für unsere Untersuchung noch die Kenntnis derjenigen Evolvente K_e der Kurve K_2 erforderlich, welche durch den Schnittpunkt E der Kurve K_1 mit der Y-Axe hindurchgeht.

Um die Gleichung dieser Evolvente K_e zu ermitteln, berechnen wir zunächst die Bogenlänge der Kurve K_2.

Heisst diese Bogenlänge s, so ist

$$ds = \sqrt{dx_2^2 + dy_2^2} \ ,$$

oder auch

$$ds = dy_2 \sqrt{1 + \left(\frac{dx_2}{dy_2}\right)^2} \ .$$

Nach Gleichung (47) ist

$$dy_2 = -\lambda \cos\alpha \cdot d\alpha \ ;$$

ferner ist

$$\frac{dx_2}{dy_2} = \operatorname{cotg}\alpha \ ,$$

demnach entsteht

$$ds = -\lambda \cos\alpha \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha} \cdot d\alpha$$

Durch Integration also

$$s = -\lambda \int \cos\alpha \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha} \cdot d\alpha \ .$$

Nunmehr ist $\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$ und $\cos\alpha \cdot d\alpha = d \sin\alpha$, somit

$$s = -\lambda \int \frac{d\sin\alpha}{\sin\alpha} \ ,$$

oder

$$s = -\lambda \ln [\sin\alpha] + C_2 \ .$$

Um die Konstante C_2 zu bestimmen, beachte man, dass für $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $s = \tau$ wird, somit nach letzter Gleichung

$$C_2 = \tau \ .$$

Es ergiebt sich also die verlangte Bogenlänge

$$s = \tau - \lambda \, ln \, [sin \, \alpha] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Es ist dies auch gleichzeitig die Länge der Tangente an die Kurve K_2 vom Berührungspunkte mit ihr bis zum Schnittpunkte mit der zu ermittelnden Evolvente K_e.

Sind x und y die Koordinaten der Evolvente K_e, so ist

$$x + x_2 = s \cos \alpha \text{ und } y + y_2 = s \sin \alpha,$$

und mit Berücksichtigung von Gleichung (51) entsteht

$$x = -x_2 + \left\{ \tau - \lambda \, ln \, [sin \, \alpha] \right\} cos \, \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

$$y = -y_2 + \left\{ \tau - \lambda \, ln \, [sin \, \alpha] \right\} sin \, \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man mit Hülfe der vorigen die verlangte Evolvente K_e konstruieren. Zu diesem Zwecke nehme man zunächst einen beliebigen Winkel α an, berechne aus Gleichung (46)

$$y_2 = \tau - \lambda \sin \alpha,$$

und dann mit Gleichung (53) den Wert von y. Nunmehr kann man aus Gleichung (48) mit Hülfe von y_2 die Abscisse x_2 finden, und indem man den Wert von x_2 in die Gleichung (52) einsetzt, erhält man auch den Wert von x.

Unter Benutzung der berechneten Koordinaten x und y lässt sich ein Punkt der Evolvente K_e konstruieren.

Nunmehr wollen wir noch untersuchen, unter welchem Winkel die Kurve K_1 im Punkte E die Y-Axe schneidet. Die Evolvente K_e schneidet sie selbstverständlich unter einem rechten Winkel. Wir haben also den Winkel zu bestimmen, den die Tangente der Kurve K_1 mit der Y-Axe bildet; nennen wir diesen Winkel φ, so besteht die Relation

$$tg \, \varphi = -\frac{dx_1}{dy_1}$$

Nun ist die Gleichung der Kurve K_1 mit Gleichung (50) ermittelt; aus ihr erhält man durch Differentiation

$$-\frac{dx_1}{dy_1}=\frac{\sqrt{\lambda^2-y_1^2}\cdot\tau}{y_1^2}+\frac{y_1+\tau}{\sqrt{\lambda^2-y_1^2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\lambda y_1\cdot\left[-\frac{1}{\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2-y_1^2}\right)\sqrt{\lambda^2-y_1^2}}-\frac{1}{\left(\lambda-\sqrt{\lambda^2-y_1^2}\right)\sqrt{\lambda^2-y_1^2}}\right],$$

oder

$$\frac{dx_1}{dy_1}=\frac{\sqrt{\lambda^2-y_1^2}\cdot\tau}{y_1^2}+\frac{y_1+\tau}{\sqrt{\lambda^2-y_1^2}}-\frac{\lambda^2}{y_1\sqrt{\lambda^2-y_1^2}},$$

oder endlich

$$-\frac{dx_1}{dy_1}=\frac{y_1^3+\lambda^2(\tau-y_1)}{y_1^2\sqrt{\lambda^2-y_1^2}}.$$

Es folgt somit

$$tg\,\varphi=-\frac{y_1^3+\lambda^2(\tau-y_1)}{y_1^2\sqrt{\lambda^2-y_1^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (54)$$

Da für eine beliebige Stelle der Kurve K_1 die Grösse $\lambda > y_1$, ferner aber auch $\tau > y_1$ ist, so lässt Gleichung (54) erkennen, dass $tg\,\varphi$ negativ ist, also φ ein stumpfer Winkel ist, wie auch Figur (15) zeigt. Für die Stelle E der Kurve K_1 ist $y_1=\lambda$, also

$$tg\,\varphi=-\frac{\lambda^3+\lambda^2(\tau-\lambda)}{\lambda^2\cdot 0}=-\infty\text{, d. h. }\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Mithin schneidet die Kurve K_1 die Y-Axe unter einem rechten Winkel.

Rekapitulieren wir die ermittelten Ergebnisse unserer Untersuchung, so haben wir gefunden, dass die Gleichung (50) die Gleichung der „neutralen Linie“ ist; dass ferner letztere keine Faser

ist.*) Die Verbindungslinie der Querschnittsschwerpunkte, die sogenannte „schwere Linie“ ist, wie schon oben bemerkt, nicht theoretisch genau äquidistant der neutralen Linie, doch äusserst angenähert. Beide Linien sind aber, wie gefunden, nicht äquidistant zu den Fasern, und deshalb kann, weil ja die Fasern im ungebogenen Zustande des Körpers als gerade Linien vorausgesetzt sind, die Gestalt des Stabes auch hier keine geradcylindrische sein. Vermittelst der beiden Gleichungen (52) und (53) lässt sich übrigens auch die Kurve derjenigen gebogenen Faser finden, welche durch den neutralen Punkt E des unteren Querschnittes hindurchgeht, und die Gleichung (48) ist endlich die Gleichung der Evolute sämtlicher Fasern in der Kraftebene.

Das gestellte Problem ist durch die Gleichungen (32) und (33), durch die Gleichungen (48) und (50), durch die Gleichungen (52) und (53) und endlich durch die Gleichungen (41) und (42) vollkommen gelöst, jede hierzu erforderliche Grösse kann aus den notwendig gegebenen bestimmt werden.

Wie zu ersehen, haben wir die ausführliche Behandlung unseres Problems für den Fall gemacht, dass der Körper auf excentrische Druckfestigkeit in Anspruch genommen ist. — Analog ist die Entwicklung, wenn er auf excentrische Zugfestigkeit beansprucht wird, nur liegen dann die beiden Kurven K_1 und K_2 auf derselben Seite von XX, siehe Figur (15), während sie im ersteren Falle auf beiden Seiten von XX liegen.

Den beiden Gleichungen (48) und (50) der Evolute K_2 sämtlicher Fasern in der Kraftebene und der neutralen Linie K_1 kann man auch die Gestalten geben:

$$x_2 = -\sqrt{\lambda^2 - (\tau - y_2)^2} + \frac{1}{2}\lambda \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\tau - y_2}{\lambda}\right)^2}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\tau - y_2}{\lambda}\right)^2}}, \quad . \quad (55)$$

*) Ist ein horizontaler Stab an einem Ende eingespannt und an dem anderen freien Ende vertikal belastet, so hat der Längsschnitt desselben, falls es ein Körper gleicher Festigkeit ist, unter anderen Formen eine teils horizontal geradlinig, teils parabolisch begrenzte Form. Die Verbindungslinie der Schwerpunkte ist dann die neutrale Linie, also nicht eine Faser, da sie ja eine parabolische Kurve ist. Es giebt also hier keine Faser, die man als sogenannte „elastische Linie“ ansehen kann.

und

$$x_1 = -\sqrt{\lambda^2 - y_1^2}\left(1+\frac{\tau}{y_1}\right) + \frac{1}{2}\lambda \ln \frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{y_1}{\lambda}\right)^2}}{1-\sqrt{1-\left(\frac{y_1}{\lambda}\right)^2}} \quad . \quad (56)$$

Diese beiden Gleichungen und die Gleichungen (52) und (53) lassen sich für die praktischen Anwendungen, mit Vernachlässigung sehr kleiner Grössen, wesentlich vereinfachen.

Wir wollen vermittelst derselben speciell für die wichtigere excentrische Druckfestigkeit die zur Bestimmung der Durchbiegung von Säulen erforderliche Formel aufstellen.

Da die Durchbiegung von Säulen nur eine sehr kleine sein darf, so ist gestattet, $\sin\alpha = 1$ zu setzen, weil sich ja dann α von $\frac{\pi}{2}$ sehr wenig unterscheidet. Daher darf man in den Gleichungen (52) und (53), welche zusammen die Gleichungen der durch den neutralen Punkt des Endquerschnittes hindurchgehenden Faser sind, $ln\ [\sin\alpha] = 0$ nehmen und erhält die angenäherten Gleichungen

$$x = -x_2 + \tau\cos\alpha$$
$$y = -y_2 + \tau\sin\alpha = y_2 + \tau$$

Aus Gleichung (46) folgt nun

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{\tau - y_2}{\lambda}\right)^2},$$

somit erhält man

$$x = -x_2 + \tau\sqrt{1-\left(\frac{\tau - y_2}{\lambda}\right)^2},$$

oder da angenähert $\tau - y_2 = y$

ist,

$$x = -x_2 + \tau\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2}$$

d. h.

$$x_2 = -x + \tau\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2}.$$

Diesen Wert von x_2 und den Wert $y_2 = \tau - y$ setze man in die Gleichung (55) ein, so erhält man

$$-x = -\tau\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2} - \lambda\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2} + \frac{1}{2}\lambda ln\frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2}}{1-\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2}},$$

oder auch

$$-\frac{x}{\lambda} = -\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2}\left(1+\frac{\tau}{\lambda}\right) + \frac{1}{2}ln\frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2}}{1-\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2}}, \quad (57)$$

als die angenäherte Gleichung derjenigen Faser, die durch den neutralen Punkt des Endquerschnittes hindurchgeht. Vergleicht man diese Gleichung mit Gleichung (50) oder (56) der neutralen Linie, so ist ersichtlich, dass die durch den neutralen Punkt des Endquerschnittes hindurchgehende Faser mit der neutralen Linie fast zusammenfällt, weil ja bei sehr geringer Durchbiegung y_1 von λ sich fast gar nicht unterscheidet. Man kann demnach dann auch neutrale Linie und schwere Linie als Fasern ansehen, was dazu führt, dass in der Praxis die Körper geradcylindrisch konstruiert werden dürfen.

Nunmehr wollen wir mit Hülfe der Gleichung (57) die Durchbiegung für die praktische Anwendung bestimmen.

Nach einer bekannten logarithmischen Reihe ist:

$$\frac{1}{2}ln\frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2}}{1-\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2} + \frac{1}{3}\left[\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2}\right]^3 +$$

$$+\frac{1}{5}\left[\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2}\right]^5 + \ldots\ldots,$$

diese Reihe konvergiert, weil der absolute Wert von $\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2}$ kleiner als eins, also ein echter Bruch ist.

Hiermit geht unsere Gleichung (57) über in:

$$-\frac{x}{\lambda} = -\frac{\tau}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2} + \frac{1}{3}\left[\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2}\right]^3 + \frac{1}{5}\left[\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2}\right]^5 + \ldots$$

Nun ist der Wert $\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2}$ ein sehr kleiner Betrag, namentlich höhere Potenzen davon, so dass wir mit Vernachlässigung sehr kleiner Grössen erhalten

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{\tau}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (58)$$

Bezeichnen wir nun mit p_a den Abstand des Schwerpunktes des Anfangsquerschnittes und mit p_e denjenigen des Schwerpunktes des Endquerschnittes von der Belastung K, so ist

$$\lambda = p_e + n,$$

und für $y = p_a + n$ ist $x = l$, worin l fast ganz genau die Länge des Stabes, der Säule bedeutet. Hiermit erhalten wir aus Gleichung (58)

$$l = \tau\sqrt{1-\left(\frac{p_a+n}{p_e+n}\right)^2},$$

oder

$$l = \frac{\tau}{p_e+n}\sqrt{(p_e-p_a)(p_e+p_a+2n)}\ .$$

Nunmehr ist $p_e - p_a$ nichts anderes als die Durchbiegung δ, das heisst die Entfernung der Projektion des Schwerpunktes des Anfangsquerschnittes auf die Horizontale vom Schwerpunkte des Endquerschnittes. Es folgt also aus der letzten Gleichung

$$l = \frac{\tau}{p_e+n}\sqrt{\delta\,(p_e+p_a+2n)}\ .$$

Setzt man in diese Gleichung $p_a = p_e - \delta$, so erhält man

$$l = \frac{\tau}{p_e+n}\sqrt{\delta\,(2\,p_e+2n-\delta)}\ .$$

Nun ist aber $n = \frac{r^2}{p_e}$, somit ergiebt sich nach einiger Transformation

$$\delta^2 - 2\delta\left(p_e + \frac{r^2}{p_e}\right) = -\left(\frac{l}{\tau}\right)^2\left(p_e + \frac{r^2}{p_e}\right)^2,$$

woraus dann folgt

$$\delta = \left(p_e + \frac{r^2}{p_e}\right)\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{l}{\tau}\right)^2}\right] \quad \ldots \quad (59)$$

In dieser Gleichung ist τ nichts anderes als der Krümmungsradius ϱ vom neutralen Faserelement des Endquerschnittes, also ist nach Gleichung (26)

$$\tau = \varrho = \frac{EFn}{K},$$

oder auch

$$\tau = \frac{EFr^2}{Kp_e},$$

und nach Gleichung (32)

$$K = \frac{-kFn}{\pm\eta + n},$$

woraus sich ergiebt

$$K = \frac{kF}{\pm\frac{\eta p_e}{r^2} + 1},$$

von welchen beiden Vorzeichen zur Bestimmung der Tragkraft der Säule das positive Geltung hat und auch genommen werden soll, so dass die Tragkraft der Säule sich ergiebt

$$K = -\frac{kF}{1 + \frac{\eta p_e}{r^2}} \quad \ldots \quad (60)$$

Setzt man den Wert von K in die Gleichung für τ ein, so entsteht

$$\tau = \frac{EFr^2}{-p_e\frac{kF}{1 + \frac{\eta p_e}{r^2}}},$$

oder auch

$$\tau = -\frac{E}{k}\,\frac{r^2 + \eta\, p_e}{p_e},$$

und indem man endlich diesen Wert von τ in die Gleichung (59) einsetzt, ergiebt sich für die Durchbiegung

$$\delta = \left(p_e + \frac{r^2}{p_e}\right)\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{l\,k\,p_e}{E(r^2 + \eta\, p_e)}\right)^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Eine andere Form dieser Gleichung erhält man, wenn man den Wert

$$\tau = \frac{E\,F\,r^2}{K\,p_e}$$

direkt in die Gleichung (59) einsetzt. Man erhält dann nämlich

$$\delta = \left(p_e + \frac{r^2}{p_e}\right)\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{l\,K\,p_e}{E\,F\,r^2}\right)^2}\right],$$

oder

$$\delta = \left(p_e + \frac{r^2}{p_e}\right)\left[1 \pm \sqrt{1 \quad \left(\frac{K\,l\,p_e}{E\,J_s}\right)^2}\right] \quad . \quad (62)$$

Mit Hülfe der Gleichungen (61) oder (62) können wir nun die Durchbiegung δ berechnen.

Wir wollen für die Durchbiegung δ noch eine andere Gleichung aufstellen, indem wir in der Ausgangsgleichung

$$l = \frac{\tau}{p_e + n}\sqrt{\delta\,(2p_e + 2n - \delta)}$$

noch δ gegen $2p_e + 2n$ vernachlässigen. Man erhält dann durch Transformation aus der letzten Gleichung

$$\delta = \frac{1}{2}\,(p_e + n)\left(\frac{l}{\tau}\right)^2,$$

und mit Einsetzung des Wertes $n = \frac{r^2}{p_e}$,

$$\delta = \frac{1}{2}\left(p_e + \frac{r^2}{p_e}\right)\left(\frac{l}{\tau}\right)^2 .$$

Hierin den Wert

$$\tau = \frac{E}{k} \cdot \frac{r^2 + \eta p_e}{p_e}$$

eingesetzt, giebt

$$\delta = \frac{1}{2}\left(p_e + \frac{r^2}{p_e}\right)\left[\frac{l k p_e}{E (r^2 + \eta p_e)}\right]^2,$$

oder

$$\delta = \frac{1}{2} p_e (p_e^2 + r^2)\left[\frac{l k}{E (r^2 + \eta p_e)}\right]^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Diese Gleichung ist aber nur eine angenäherte, gilt also nur bis zu einer gewissen Grenze, sie ist dadurch charakterisiert, dass $p_e > \delta$ sein muss, d. h.

$$p_e > \frac{1}{2} p_e (p_e^2 + r^2)\left[\frac{l k}{E (r^2 + \eta p_e)}\right]^2,$$

oder

$$\frac{(r^2 + \eta p_e)^2}{r^2 + p_e^2} > \frac{1}{2}\left(\frac{l k}{E}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

In anderer Form erhält man die Grenze, wenn man in der Gleichung

$$\delta = \frac{1}{2}\left(p_e + \frac{r^2}{p_e}\right)\left(\frac{l}{\tau}\right)^2$$

den Wert

$$\tau = \frac{E F r^2}{K p_e} = \frac{E J_s}{K p_e}$$

einsetzt. Man erhält dann nämlich für die Durchbiegung

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{r^2 + p_e^2}{p_e}\left[\frac{K l p_e}{E J_s}\right]^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Für die Grenze der Gültigkeit dagegen, da $\delta < p_e$ sein muss,

$$E J_s > Kl \sqrt{\frac{r^2 + p_e^2}{2}} ,$$

d. h.

$$K < \frac{E J_s}{l \sqrt{\frac{r^2 + p_e^2}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

Was nun die Durchbiegung δ, die sich aus den Gleichungen (61) oder (62) oder den Gleichungen (63) oder (65) berechnen lässt, anbelangt, so ergiebt sie sich so ausserordentlich gering, dass man sie ganz vernachlässigen kann, also in der Gleichung (60) zur Bestimmung der Tragkraft statt des Hebelarmes p_e des Endquerschnittes den Hebelarm p_a des Anfangsquerschnittes nehmen darf. Letzterer ist bei jeder auszuführenden Konstruktion von vornherein bekannt, während ersterer noch zu berechnen ist. Dies geschieht, wenn man statt p_e den Wert $p_a + \delta$ in die Gleichungen für die Durchbiegung einsetzt und daraus δ berechnet. Ist dies geschehen, so ist auch p_e bekannt und lässt sich endlich K genau bestimmen.

Um zu zeigen, wie ausserordentlich gering die Durchbiegung ist, sei ein schmiedeiserner Stab von kreisförmigem Querschnitte und 5 m Länge excentrisch belastet. Der Durchmesser des Stabes betrage 100 mm. Es ist dann der Trägheitsradius $r = 25$ mm. Der Elasticitätsmodul für Schmiedeisen ist $E = 20000$ kg und die zulässige Belastung pro Quadratmillimeter soll $k = 5$ kg betragen. Es findet sich dann nach Gleichung (61), wenn wir $p_e = 25$ mm nehmen, $\delta = 50 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1}{60^2}}\right] = 0{,}00650$ mm, und mit der angenäherten Gleichung (63) $\delta = \frac{25}{60^2} = 0{,}0069$ mm.

Nehmen wir $p_e = 250$ mm, so findet sich mit Gleichung (61)

$$\delta = 252{,}5 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1}{42^2}} \right] = 252{,}5 \cdot 0{,}0003 = 0{,}07575 \text{ mm},$$

mit der angenäherten Gleichung (63) $\delta = \frac{1}{2} \frac{252{,}5}{42^2} = 0{,}0716$ mm.

Bei einer zulässigen Belastung von $k = 10$ kg pro Quadratmillimeter ergiebt sich für vorliegenden Stab folgendes.

Für $p_e = 25$ mm nach Gleichung (61) $\delta = 0{,}0275$, nach Gleichung (63) $\delta = 0{,}0276$ mm.

Für $p_e = 250$ mm dagegen nach Gleichung (61) $\delta = 0{,}290$ mm, und nach Gleichung (63) $\delta = 0{,}286$ mm.

Wir finden also in allen diesen Fällen für die Durchbiegung so geringe Werte, dass wir $p_e = p_a$ setzen dürfen. Endlich berechnet sich noch nach Gleichung (60) die Tragkraft, wenn $k = 5$ kg und $p_e = 25$ mm beträgt, $K = 13090$ kg und wenn $k = 5$ kg und $p_e = 250$ mm beträgt, $K = 1870$ kg.

Für $k = 10$ kg ergiebt sich mit $p_e = 25$ mm, $K = 26180$ kg; mit $p_e = 250$ mm, $K = 3740$ kg.